The Government of the Philippine Islands
Department of the Interior
Weather Bureau

The Harmonic Formula of Fourier and Bessel and Its Application to the Study of the Diurnal Variation of the Atmospheric Pressure in Manila During the Period 1890–1909

By

Rev. Antonio Galán, S. J.
Manila Observatory

Prepared under the Direction of

Rev. José Algué, S. J.
Director of the Weather Bureau.

MANILA
BUREAU OF PRINTING
1914

127182

THE GOVERNMENT OF THE PHILIPPINE ISLANDS
DEPARTMENT OF THE INTERIOR
WEATHER BUREAU

The Harmonic Formula of Fourier and Bessel and Its Application to the Study of the Diurnal Variation of the Atmospheric Pressure in Manila During the Period 1890–1909

By

Rev. Antonio Galán, S. J.
Manila Observatory

Prepared under the Direction of

Rev. José Algué, S. J.
Director of the Weather Bureau.

MANILA
BUREAU OF PRINTING
1914

127182

INTRODUCTION.

I am of the opinion that the present work, entitled "The Harmonic Formula of Fourier and Bessel and Its Application to the Study of the Diurnal Variation of the Atmospheric Pressure in Manila during the Period 1890–1909," prepared by Rev. Antonio Galán, S. J., a temporary member of the staff of the Manila Observatory, will be very well received by those meteorologists who think that such studies and discussions should be made in all the principal observatories where sufficient material has been collected for a number of years.

I hope that in a short time we may be able to find time and opportunity to work up, in a manner similar to that done by Father Galán for the barometric data, the observations collected in the Observatory on the temperature, humidity, and other periodic elements of meteorology.

And I hope also that the stay in Manila of Father Galán, who is appointed to continue the splendid work of Fathers Viñes, Gangoiti, and Gutierrez Lanza of the Belen Observatory, Habana, may be as useful to him as my stay in Habana during the first few months of 1892 was to me.

JOSÉ ALGUÉ,
Director, Weather Bureau.

MANILA OBSERVATORY, *June 19, 1914.*

THE HARMONIC FORMULA OF FOURIER AND BESSEL.

The harmonic formula of Fourier and Bessel is usually presented in one or other of the two following forms:

(I) $y = M + p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x + p_3 \cos 3x + q_3 \sin 3x + \ldots$

(II) $y = M + u_1 \sin (U_1 + x) + u_2 \sin (U_2 + 2x) + u_3 \sin (U_3 + 3x) + \ldots$

It is evident that these two formulæ are one and the same under different form, for developing (II) we have:

$y = M + u_1 \sin U_1 \cos x + u_1 \cos U_1 \sin x + u_2 \sin U_2 \cos 2x + u_2 \cos U_2 \sin 2x + \ldots$ etc.

and making in the expression—

$$\begin{array}{cc} u_1 \sin U_1 = p_1 & u_1 \cos U_1 = q_1 \\ u_2 \sin U_2 = p_2 & u_2 \cos U_2 = q_2 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

we find that (II) is reduced to (I).

The practical applications of this formula are many and important.

Fourier's theorem (say Thomson and Jait) is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but may be said to furnish an indispensable instrument in the treatment of nearly every recondite question in modern physics. To mention only sonorous vibrations, the propagation of electric signals along the telegraph wire, and the conduction of heat by the earth's crust, as subjects in their generality intractable without it, is to give but a feeble idea of its importance.

In the present study we limit ourselves to the application which is made of the formula in meteorology; and we will endeavor to show what each one of its elements represents, and point out its utility and practical application.[1]

The greater number of the phenomena studied in meteorology are periodic, and the curves which represent them are consequently periodic curves—that is to say, curves which represent the movement of a point which passes an indefinite number of times over the same path in the same time.

Fourier proved that any periodic curve could be resolved into a series of harmonic curves of periods 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., of the given curve, and that *only one combination* of these elementary curves was possible to reproduce a specified curve. This corresponds with the fact observed by Helmholtz that the same composite sound is always resolved into the same elementary sounds.

Prescinding for the moment from the practical utility which this resolution of curves may have in meteorology, let us examine how the formula which we are studying is nothing more than the analytical expression of periodic curves in terms of their harmonic components.

A harmonic curve is one which represents graphically the harmonic motion of a point.

---

[1] One of the best practical treatises which we know on the employment of Fourier's series in mathematical physics is "An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical Harmonics" by W. E. Byerly, published by Ginn & Co., New York.

The original work of Fourier himself "Théorie Analytique de la Chaleur" is perhaps as up to date as any other modern publication on this subject. Mellor's "Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics," Longmans, London and New York, may also be consulted.

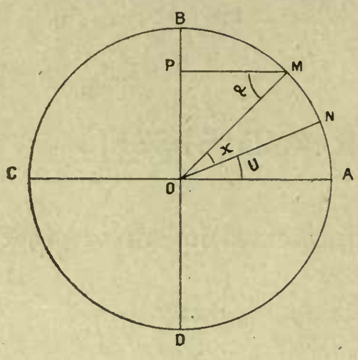


Fig. 1

Harmonic motion is that to which the projection of a point, moving uniformly around a circumference on to a diameter, is subjected. The circumference is called the *circle of reference.*

If the point M (fig. 1) moves around the circumference uniformly, the motion of its projection P on the diameter BD is harmonic; while M describes the circumference once in the direction $ABCDA$, the point P traverses the diameter in the direction $OBODO$.

As a help to those who may not be familiar with this class of motion, the following definitions of terms are given:

Period is the time required for the point M to describe the circumference, or for P in its double journey of the diameter.

Elongation is the variable distance between the center O and the moving point P.

Amplitude is the maximum elongation, or maximum distance which the point P can be separated from O; as is evident, this distance is the radius of the circle of reference.

O and A are generally taken as the starting points of the motion. The zero of time is arbitrary; it may be taken on any point in the circumference.

Phase is the angular distance between the moving point and the starting place of the motion. In speaking of the point which moves on the diameter, it is necessary to refer it to the circle of reference in order to determine its phases; for example, in figure 1 if the point is found in P, its phase is described by the degrees of the arc MA or of the angle MOA.

Epoch of a definite phase is the instant at which this phase takes place; v. g., if the arc MA is 60° and it is two hours since the moving point was at the zero of time, we say that 2 o'clock is the epoch of the phase of 60°.

The initial phase is the angular distance between the zero of time and the starting place of the motion. In the figure, if we take the point N as the zero of time, the initial phase of the motion is given by the arc NA.

Suppose that the point M requires a day to describe the circumference—that is to say, that the period of its motion is twenty-four hours. Starting from the zero of time N (fig. 2), let us divide the circumference into 24 equal parts; draw the straight line NX equal to the length of the circumference; this line will also be divided into 24 equal parts, each one of which represents the length of an arc of 15°, or one hour of time. Suppose the circle of reference to move along the straight line NX parallel to the vertical diameter with a motion equal to that of the moving point in the circumference; at the end of each hour the center O will pass through each of the

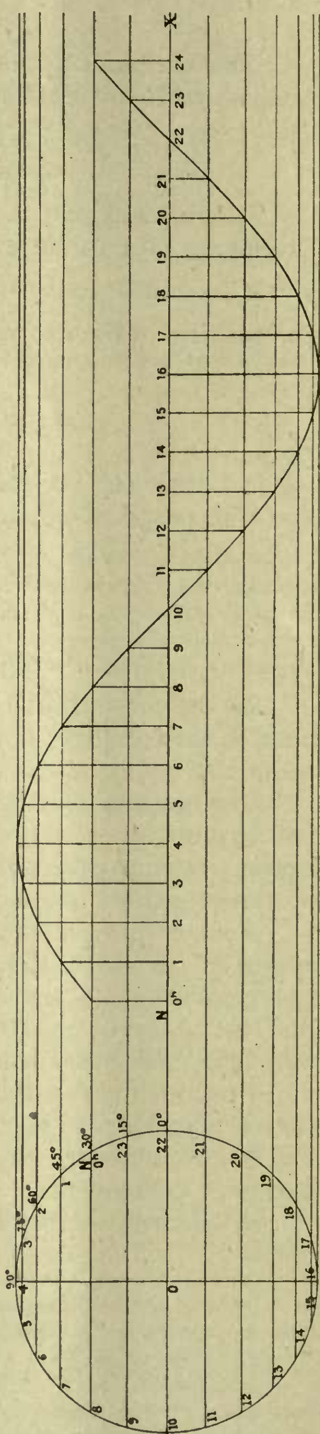


Fig. 2.

successive points in which the straight line was divided, and the point which moves on the diameter will describe the sine-curve of the figure.

If it is desired to describe another harmonic curve of a period $\frac{1}{2}$ of the former, the parts into which the circle of reference is to be divided must contain double the number of degrees, for it is clear that, if the circumference is to be described in twelve hours, the point must pass through 30° each hour. In like manner for curves of periods $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... of the first, the respective circles of reference must be divided into parts containing triple, quadruple, etc., the number of degrees; so that the periods of these curves are inversely to the number of degrees contained by the parts into which their circles of reference are divided.

Any ordinate of the curve represents the elongation (distance of the moving point P from O) in the corresponding moment. Call these ordinates y_1', y_1'', etc. Then in the rectangular triangle POM (fig. 1) we have as a general expression of the ordinates—

$$OP=y=OM \sin \alpha = u \sin (U+x)$$

where u is the radius of the circle of reference, or the amplitude of the curve, U the initial phase, and x the parts of the circumference through which the point M has moved at a given moment.

With these considerations in view, we get for the different ordinates of the characteristic harmonic curves of any periodic curve the following expressions:

	First ordinate.	Second ordinate.	Third ordinate.	
First curve	$u_1 \sin U_1$	$u_1 \sin (U_1+x)$	$u_1 \sin (U_1+2x)$	....
Second curve ..	$u_2 \sin U_2$	$u_2 \sin (U_2+2x)$	$u_2 \sin (U_2+4x)$	....
Third curve	$u_3 \sin U_3$	$u_3 \sin (U_3+3x)$	$u_3 \sin (U_3+6x)$	....
....		....	....	
....		....	....	

Making an algebraic sum of homonymous ordinates we have the following expressions for the corresponding ordinates of the resultant periodic curve:

Resultant.

First ordinate $= u_1 \sin U_1 + u_2 \sin U_2 + u_3 \sin U_3 +$ ....

Second ordinate $= u_1 \sin (U_1+x) + u_2 \sin (U_2+2x) + u_3 \sin (U_3+3x) +$ ....

Third ordinate $= u_1 \sin (U_1+2x) + u_2 \sin (U_2+4x) + u_3 \sin (U_3+6x) +$ ....

....

which, as is readily seen, are nothing more than particular expressions of the general formula—

$$u_1 \sin (U_1+x) + u_2 \sin (U_2+2x) + u_3 \sin (U_3+3x) + \ldots\ldots$$

in which the variable element x successively takes the corresponding values.

Deducing Bessel's formula by this process, what was said in the beginning becomes clear, viz, that it is the analytical expression of a periodic curve in terms of its harmonic components; each one of the terms representing one of these components.

The constants u and U are usually called harmonic coefficients (u lineal, and U angular), for they are the elements which characterize the harmonic motion in question; u gives the amplitude, and consequently the importance of the motion, for as may be seen in the figures, according as u decreases, the motion of the point P on the diameter becomes slower; U (fig. 2) fixes the epoch of the different phases; an increase in its value accelerates the epoch of all the phases, and, on the contrary, a decrease retards it.

It is of great importance to remember this property of the initial phase; for example, if in a station whose longitude was 15° W. of Greenwich it was required to calculate in Greenwich mean time instead of in local mean time, the zero of time is

advanced one hour, and it is hence necessary to diminish the value of the initial phases 15° in U_1, 30° in U_2, 45° in U_3, etc. Hence, it is important that in all cases the time employed should be explicitly stated.

The quantity M which appears in the formula represents the mean of the observations which enter into the discussion. What is developed in the trigonometrical series of the formula is the difference between each observation and the mean of all of them; consequently, in order that the observations (or the ordinates of the observation curves) be represented according to this formula, it is necessary to add the quantity M to the development of these differences.

What has been said is no doubt sufficient to give a general idea of the mechanism of the formula, and in the application which will be made of it in the study of the diurnal variation of the atmospheric pressure in Manila we will endeavor to make this idea more concrete.

APPLICATION OF THE FORMULA TO THE ANALYTICAL STUDY OF THE DIURNAL VARIATION OF THE ATMOSPHERIC PRESSURE IN MANILA DURING THE PERIOD 1890–1909.

In the preparation of the data which were to enter directly in the calculation the following method was followed:

The hourly means of each month were taken from the official publications of the Observatory, and the mean of the zero hour, or first midnight, of the representative day of each month was calculated separately; this mean is the mean value of the readings of the first midnight of each day of the month. As the zero hour, or first midnight, of a day is the last midnight of the preceding, in any month (January for example) the readings of the 0^h will be: For the 1st, that of the 12 p. m. of the last day of December of the preceding year; for the 2d, that of 12 p. m. of January 1, etc., so that the values that enter into the mean of this hour are the same as those of 12 p. m., except the reading for 12 p. m. of the last day of each month, which is substituted for the corresponding one of the previous month.

It is evident, therefore, that, having calculated the mean of the 12 p. m. readings, it is sufficient, in order to calculate that of the 0^h readings, to subtract the 12 p. m. reading of the last day of the month in question from the corresponding reading of the preceding month, divide this difference by the number of days of the month, and add the result algebraically to the mean of the 12 p. m. readings.

Having obtained these 25 hourly means, the general hourly means of the twelve months for the whole period have been calculated by grouping together like months, and taking the mean of the means obtained for each hour of a given month in different years. These general hourly means have been approximated to thousandths and are given in Table I.

Table II is the same as I with the aperiodic element removed. The following will give an idea of this correction:

Noncyclic or aperiodic variation.—In the explanation of the formula we saw that the elementary harmonic curves consist of 25 ordinates corresponding to the different hours of the day, from 0^h to 24^h, both inclusive. The extreme ordinates are equal for the same curve, consequently the ordinates corresponding to 0^h and 24^h in the resultant curve must be equal, in that they are the algebraic sum of the corresponding ordinates in different elementary curves.

Hence, it will be understood why it is necessary to calculate the mean of the zero hours; for one must be quite sure that the curve to be analyzed as a periodic one has the essential characteristic of periodicity, viz, that its extreme ordinates be equal. In case this is not so, then some element has been introduced into the march of the phenom-

enon which perturbs its periodicity. This perturbation is what is called *noncyclic* or *aperiodic variation.*

What is ordinarily the cause and origin of this variation will be understood by a familiar illustration.

The temperature varies in the different seasons of the year, rising in spring and summer and falling in autumn and winter; so that in May, for example, although it may not be said in general that every day is warmer than the preceding, nevertheless the general tendency is toward a rise of temperature; and if we wish to calculate the mean diurnal variation of temperature for this month in an average year by assigning to each hour of the day the mean for that hour derived from the whole thirty-one days, we shall find that the second midnight of the representative day is somewhat warmer than the first midnight.

In the case of barometric observations we come across an analogous phenomenon. It is well known that the atmospheric pressure is subject to an annual oscillation over and above the diurnal oscillation. In studying, therefore, the characteristics proper to the monthly diurnal variation of atmospheric pressure, we must begin by eliminating the aperiodic element.

This elimination is usually performed by applying to each hour the correction—

$$\frac{D(12-h)}{24}$$

in which D is obtained by subtracting the value of the 0^h from that of the 24^h, and h represents the hour in which the correction is to be applied. This correction is logical only on the hypothesis that D comes in at a uniform rate throughout the twenty-four hours.

To prove the legitimacy of this hypothesis presents difficulties; nevertheless, when the investigation is limited to the twenty-four hours it is usually accepted, for it seems to be the only workable hypothesis.

Let us see how the formula implicitly supposes this hypothesis. If the variation is supposed to be uniform during the twenty-four hours, it must be represented by a straight line. The correction formula will, therefore, be the equation of the straight line—

$$y=b+\alpha\, x\,(1)$$

Take as origin of rectangular coördinates the zero hour and transfer as usual the hours to the axis X. In the formula (1) x represents the successive hours; y the correction to be applied to each. When the correction has been applied to the extreme hours their values must coincide; therefore, the semidifference of their values is to be added to one and subtracted from the other. The correction for these two hours, called D their difference, will be—

$$\text{for the } 24^h \ldots \pm\frac{D}{2}=b+24\alpha$$

$$\text{for the } 0^h \ldots \mp\frac{D}{2}=b$$

Eliminating b, we have—

$$\pm D=24\alpha \therefore \alpha=\pm\frac{D}{24}$$

and substituting the values obtained for α and b in the equation (1) we get—

$$y=\mp\frac{D}{2}\pm\frac{D}{24}x=\frac{D\,(12-x)}{24}$$

Hence, we see that the hypothesis which requires the aperiodic variation to be uniform during the twenty-four hours is necessary and sufficient for the deduction of the correction formula.

An example will demonstrate the influence which this correction has on the curves.

Let us take the month of November, which in our case has the largest correction. The smooth curve (fig. 3) represents the variation without correction; the dotted one represents the same variation, but with the correction applied.

From the form and position of these curves it is clearly seen that the elimination of the aperiodic element is reduced to revolving the curve through a small angle with 12 a. m. as the center, the characteristic undulations remaining the same.

Once this correction applied, the diurnal means were calculated for Table II by dividing the 24 hourly means of each month, from 0^h to $23,^h$ by 24, and Table III was formed by subtracting the diurnal mean of each month from each hourly mean.

In this last calculation we have approximated only up to two decimal places; but, as in the previous calculations, the approximation was carried to three decimal places, the inaccuracy of the data in the last table cannot be greater than 0.005 and the sum of the positive values does not differ absolutely from that of the negative by more than two or three hundredths at most, which would not have been obtained if in the earlier calculations the approximation had only been carried to two decimal places.

In the analytical study which follows we have used local mean time.

All that is necessary for the determination of each of the elementary waves, into which the diurnal barometric variation is to be resolved, are the lineal harmonic coefficients u, and the angular harmonic coefficients U—that is to say, the constants of Formula II, for these are the ones which characterize those waves.

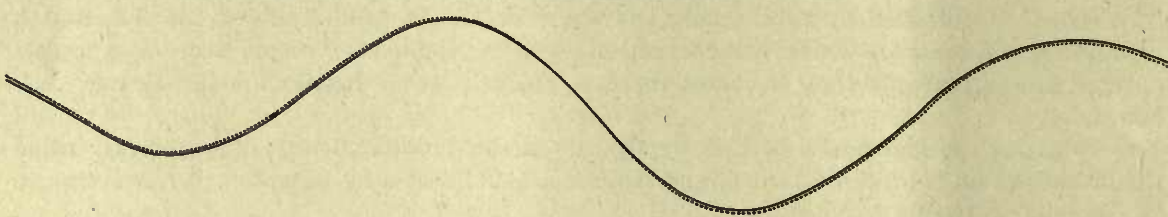


Fig. 3

These constants cannot be found directly; they must be determined by means of the constants p and q of Formula I which are calculated directly.

The equations of these constants are, as we saw before:

$$\left.\begin{array}{l} p=u \sin U \\ q=u \cos U \end{array}\right\} (1)$$

Hence, we obtain the relations:

$$\frac{\sin U}{\cos U}=\tan U=\frac{p}{q};\ \sin U=\frac{p}{u};\ \cos U=\frac{q}{u}$$

From the first of these equations we can deduce the angular constant U in terms of p and q; and from the last two in terms of p or q and u; this last is obtained by the equation:

$$u=\sqrt{p^2+q^2}$$

which is easily obtained from the equation (1) by squaring and adding. All the difficulty consists in determining the constants p and q.

The method which Bessel elaborated for this, and which we will explain at the end of this study, is long and tedious, and, moreover, requires a constant concentration in the work if errors are to be avoided; this is owing to the great number of angles to be reduced, and the frequency with which the signs change in passing from one quadrant to another. Father Dechevrens, S. J., says of this method: "La méthode naturelle n'est que pour les habiles." This Father has published two pamphlets, one en-

titled "Méthode simplifiée dite des facteurs pour le calcul des séries de Fourier et de Bessel appliquées a la Météorologie," in which by means of tables he simplifies considerably the calculation. The other pamphlet is entitled "Note complémentaire a la méthode simplifiée du calcul, etc." [1] in which he explains the manner in which the tables are formed.

The first three of these tables serve for the determination of the coefficients p and q in series of 4, 6, 8, 10, 12, 24, and 36 observations.

We think that it will not be without interest for those who may not be accustomed to this class of analysis, to work out in detail an example by Bessel's method, and see in what the utility of Father Dechevrens' tables consists; and, even at the risk of being too detailed, we will follow step by step the method of Bessel in the determination of the constants p and q for January.

The equations which give for the present case the values of these constants for the first eight terms of Formula (I) are:[2]

$$12p_1=\Sigma a_m \cos mx \qquad 12q_1=\Sigma a_m \sin mx$$
$$12p_2=\Sigma a_m \cos m(2x) \qquad 12q_2=\Sigma a_m \sin m(2x)$$
$$12p_3=\Sigma a_m \cos m(3x) \qquad 12q_3=\Sigma a_m \sin m(3x)$$
$$12p_4=\Sigma a_m \cos m(4x) \qquad 12q_4=\Sigma a_m \sin m(4x)$$

The sign Σ indicates that the quantity which it affects is to be developed into a series of terms of the same form, which follow according to the series of natural numbers 0, 1, 2, etc., so that we write:

$$\Sigma a_m \cos mx=a_0 \cos 0+a_1 \cos x+a_2 \cos 2x+a_3 \cos 3x+\ldots\ldots$$

x represents the value of one of the parts into which the circle of reference of the first elemental curve is divided. As the period of this curve is twenty-four hours, its circle of reference is divided into 24 parts, and consequently $x=15°$. The periods of the other curves are $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ of that of the first, and therefore the divisions of their respective circles of reference equal

$$2x;\ 3x;\ 4x; \text{ or } 30°;\ 45°;\ 60°;$$

a_m represents the values of Table III corresponding to the different hours; thus for January—

$$a_0=46,\ a_1=17,\ a_2=-20, \text{ etc.}$$

According to this, in order to determine p_1 in January we have—

$$12p_1=46 \cos 0°+17 \cos 15°-20 \cos 30°-45 \cos 45°\ldots\ldots$$

All that is then required is to find the values of these cosines in the trigonometrical tables and work out the operation. The work, which would be enormous if the multiplication had to be made in each term, can be simplified in the following manner.

The value of the cosines in the different hours are:

0ʰ	cos 0° =	1	12ʰ	= −1
1	cos 15° =	.966	13	= − .966
2	cos 30° =	.866	14	= − .866
3	cos 45° =	.707	15	= − .707
4	cos 60° =	.5	16	= − .5
5	cos 75° =	.259	17	= − .259
6	cos 90° =	0	18	= 0
7	cos 105° = −cos 75° =	− .259	19	= .259
8	cos 120° = −cos 60° =	− .5	20	= .5
9	=	− 707	21	= .707
10	=	− .866	22	= .866
11	=	− .966	23	= .966

[1] Tipografia della Pace di Filippo Cuggiani, Roma, Via della Pace, num. 35.

[2] The mathematical proof of these equations will be given later on.

Each of those numbers appears as a common factor of several hours. We have therefore:

$$12p_1=(0-12)1+(1-11-13+23).966+(2-10-14+22).866+(3-9-15+21).707$$
$$+(4-8-16+20).5+(5-7-17+19).259$$

Substituting for the hours which appear in parentheses the corresponding values taken from the Table III we get:

$$12p_1=(46-15)1+(17-79+63+59).966+\text{-------}$$

In the determination of q_1 we obtain by the same method:

0^h	sin 0° = 0	12^h	= 0
1	sin 15° = .259	13	= − .259
2	sin 30° = .5	14	= − .5
3	sin 45° = .707	15	= − .707
4	sin 60° = .866	16	= − .866
5	sin 75° = .966	17	= − .966
6	sin 90° = 1	18	= − 1
7	sin 105° = sin 75° = .966	19	= − .966
8	= .866	20	= − .866
9	= .707	21	= − .707
10	= .5	22	= − .5
11	= .259	23	= − .259

Taking into account the common factor of several hours we write:

$$12q_1=(1+11-13-23).259+(2+10-14-22).5+(3+9-15-21).707$$
$$+(4+8-16-20).866+(5+7-17-19).966+(6-18)1$$

and substituting their values for the hours we find q_1.

For the determination of p_2 and q_2 we proceed in the same way, remembering that the divisions of the circle of reference equal 30°, we say therefore:

p_2

0^h	cos 0° = 1	12^h	= 1
1	cos 30° = .866	13	= .866
2	cos 60° = .5	14	= .5
3	cos 90° = 0	15	= 0
4	cos 120° = − cos 60° = − .5	16	= − .5
5	cos 150° = − cos 30° = − .866	17	= − .866
6	= − 1	18	= − 1
7	= − .866	19	= − .866
8	= − .5	20	= − .5
9	= 0	21	= 0
10	= .5	22	= .5
11	= .866	23	= .866

$$12p_2=(0-6+12-18)1+(1-5-7+11+13-17-19+23).866+(2-4-8$$
$$+10+14-16-20+22).5$$

q_2

0^h	sin 0° = 0	12^h	= 0
1	sin 30° = .5	13	= .5
2	sin 60° = .866	14	= .866
3	sin 90° = 1	15	= 1
4	sin 120° = sin 60° = .866	16	= .866
5	= .5	17	= .5
6	= 0	18	= 0
7	= − .5	19	= − .5
8	= − .866	20	= − .866
9	= − 1	21	= − 1
10	= − .866	22	= − .866
11	= − .5	23	= − .5

$$12q_2=(1+5-7-11+13+17-19-23).5+(2-4-8-10+14+16-20-22).866$$
$$+(3-9+15-21)1$$

The circle of reference of the third curve is divided at every 45° hence:

p_3

0^h	cos 0° = 1	12^h	= −1
1	cos 45° = .707	13	= − .707
2	cos 90° = 0	14	= 0
3	cos 135° = −cos 45° = − .707	15	= .707
4	= −1	16	= 1
5	= − .707	17	= .707
6	= 0	18	= 0
7	= .707	19	= − .707
8	= 1	20	= −1
9	= .707	21	= − .707
10	= 0	22	= 0
11	= − .707	23	= .707

$$12p_3=(0-4+8-12+16-20)1+(1-3-5+7+9-11-13+15+17-19-21+23).707$$

q_3

0^h	sin 0° = 0	12^h	= 0
1	sin 45° = .707	13	= − .707
2	sin 90° = 1	14	= −1
3	sin 135° = sin 45° = .707	15	= − .707
4	= 0	16	= 0
5	= − .707	17	= .707
6	= −1	18	= 1
7	= − .707	19	= .707
8	= 0	20	= 0
9	= .707	21	= − .707
10	= 1	22	= −1
11	= .707	23	= − .707

$$12q_3=(1+3-5-7+9+11-13-15+17+19-21-23).707+(2-6+10-14+18-22)1$$

The divisions of the circle of reference of the fourth curve equal 60°; we have therefore:

p_4

0^h	cos 0° = 1	12^h	= 1
1	cos 60° = .5	13	= .5
2	cos 120° = −cos 60° = − .5	14	= − .5
3	= −1	15	= −1
4	= − .5	16	= − .5
5	= .5	17	= .5
6	= 1	18	= 1
7	= .5	19	= .5
8	= − .5	20	= − .5
9	= −1	21	= −1
10	= − .5	22	= − .5
11	= .5	23	= .5

$$12p_4=(0-3+6-9+12-15+18-21)1+(1-2-4+5+7-8-10+11+13-14-16+$$
$$17+19-20-22+23).5$$

q_4

0^h	sin 0° = 0	12^h	= 0
1	sin 60° = .866	13	= .866
2	sin 120° = sin 60° = .866	14	= .866
3	= 0	15	= 0
4	= − .866	16	= − .866
5	= − .866	17	= − .866
6	= 0	18	= 0
7	= .866	19	= .866
8	= .866	20	= .866
9	= 0	21	= 0
10	= − .866	22	= − .866
11	= − .866	23	= − .866

$$12q_4=(1+2-4-5+7+8-10-11+13+14-16-17+19+20-22-23).866$$

We have descended to so many particulars because we wished to show that Father Dechevrens' tables for the determination of these coefficients could be thoroughly relied on, in that they are founded on Bessel's method, and; moreover, the operations most exposed to errors are already verified. The formulæ given by Father Dechevrens are:

$$\text{I}\begin{cases} p_1=(0-12).083+(1+23-11-13).08+(2+22-10-14).072 \\ \qquad +(3+21-9-15).059+(4+20-8-16).042+(5+19-7-17).022 \\ q_1=(6-18).083+(1+11-13-23).022+(2+10-14-22).042 \\ \qquad +(3+9-15-21).059+(4+8-16-20).072+(5+7-17-19).08 \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} p_2=(0+12-6-18).083+(1+11+13+23-5-7-17-19).072 \\ \qquad +(2+10+14+22-4-8-16-20).042 \\ q_2=(3+15-9-21).083+(1+5+13+17-7-11-19-23).042 \\ \qquad +(2+4+14+16-8-10-20-22).072 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} p_3=(0+8+16-4-12-20).083+(1+7+9+15+17+23-3-5-11-13-19-21).059 \\ q_3=(2+10+18-6-14-22).083+(1+3+9+11+17+19-5-7-13-15-21-23).059 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} p_4=(0+6+12+18-3-9-15-21).083+(1+5+7+11+13 \\ \qquad +17+19+23-2-4-8-10-14-16-20-22).042 \\ q_4=(1+2+7+8+13+14+19+20-4-5-10-11-16-17-22-23).072 \end{cases}$$

Comparing them with those found by Bessel's method we see that they are identical; the coefficients of the parentheses are the same as Bessel's divided by 12.

By means of these tables we have determined the constants which form Table IV.

With these constants we proceed to the determination of the harmonic coefficients by means of the formulæ which, as we have seen, join them. We give below the ones we made use of, and the method followed:

$$\frac{p}{q}=\text{tg } U.\therefore \log p-\log q=\log \text{tg } U$$

$$u=\frac{p}{\sin U}.\therefore \log u=\log p-\log \sin U$$

In this example for January we should, according to this, have:

$$\begin{array}{r} \log p_1=\bar{1}.127429 \\ \log q_1=\bar{1}.738463 \\ \hline \log p_1-\log q_1=\bar{1}.388966=\log \text{tg } U_1 .\therefore\ U_1=13^\circ\ 45'\ 37'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log p_1=\bar{1}.127429 \\ \log \sin U_1=\bar{1}.376320 \\ \hline \log p_1-\log \sin U_1=\bar{1}.751109=\log u_1 .\therefore\ u_1=0.5638 \end{array}$$

One must remember in which quadrant U lies. This rule will help to verify it easily.

If p and q are positive, U belongs to the first quadrant; if p is positive and q negative, to the second quadrant; if both are negative, to the third; and if p is negative and q positive, then U is in the fourth quadrant.

Thus to determine U_2 in this month we find directly in the tables the angle 15° 23′; but as p_2 is positive and q_2 negative, it must be reduced to the second quadrant, which gives

$$U_2=164^\circ\ 37'$$

In this way the values of u and U given in Table V have been deduced for each month.

Although this calculation actually suffices for the discussion of the elemental curves, nevertheless we have calculated separately these four curves for each month.

The values of the ordinates of each hour together with those of the resultant, appear in Table VI, to which we have added another column containing the differences between the calculated resultant variation and the observed value. The smallness of these differences seems to be a good proof of the correctness of the calculation.

Once those waves calculated, we thought that it would not be altogether without interest to add the 12 plates in each of which appear the elemental harmonic curves of a month, together with the resultant. In this manner it will be easier to appreciate the importance of each of the curves. From them it will be seen quite clearly why it was enough to calculate the first four terms of the formula; the series is rapidly convergent, so that the fourth sinusoid is almost confounded with a straight line.

Although Father Dechevrens also gives tables for the verification of this last calculation, we thought it would be much shorter, if not easier, to work it out by the natural method.

As an example, we will calculate the four components for January. The general expression for the ordinates of the component of twenty-four hours is

$$u_1 \sin(U_1+x)$$

consequently we have the general expression

$$0.564 \sin(13^\circ\ 46'+x)$$

In order to determine the angle in the parentheses for the different hours, it is sufficient to note that in the first wave, the point which passes round the circle of reference, has described an arc of 15° at the end of first hour; 30° at the end of the second; 45° at the end of the third, etc., so that for the different hours we have:

0^h	sin 13° 46′= .238	7^h	sin 118° 46′= sin 61° 14′= .877
1	sin 28° 46′= .481	8	sin 133° 46′= sin 46° 14′= .722
2	sin 43° 46′= .692	9	sin 148° 46′= sin 31° 14′= .519
3	sin 58° 46′= .855	10	sin 163° 46′= sin 16° 14′= .280
4	sin 73° 46′= .960	11	sin 178° 46′= sin 1° 14′= .022
5	sin 88° 46′=1	12	sin 193° 46′=−sin 13° 46′=−.238
6	sin 103° 46′=sin 76° 14′= .971		

After the twelfth hour, the values begin to repeat in the same order, but with opposite sign. It then suffices to multiply each one of the natural functions, which appear in the last member, by the coefficient 0.564 in order to obtain the values which represent the different ordinates of this wave.

Second wave.—The general expression is:

$$u_2 \sin(U_2+2x)$$

which is reduced to

$$0.978 \sin(164^\circ\ 37'+2x)$$

The variable element $2x$ increases 30° every hour; hence

0^h	sin 164° 37′= sin 15° 23′= .265
1	sin 194° 37′=−sin 14° 37′=−.252
2	sin 224° 37′=−sin 44° 37′=−.702
3	sin 254° 37′=−sin 74° 37′=−.964
4	sin 284° 37′=−sin 75° 23′=−.968
5	sin 314° 37′=−sin 45° 23′=−.712
6	sin 344° 37′=−sin 15° 23′=−.265

After the sixth hour the values begin to repeat but with opposite sign, so that in order to obtain the ordinates of this curve, all that is necessary is to multiply these values by 0.978, and go on repeating this series of products till the twenty-third hour, being careful to change signs at each repetition.

The other two waves are obtained by an analogous process, taking into account the value of the variable element in each one.

Third wave.

0^h	sin 11° 1′=	.191
1	sin 56° 1′=	.829
2 ..sin 101° 1′=	sin 78° 59′=	.982
3 ..sin 146° 1′=	sin 33° 59′=	.559
4 ..sin 191° 1′=	sin 11° 1′=	−.191

Fourth wave.

0^h ..sin 130° 17′=	sin 49° 43′=	.763
1 ..sin 190° 17′=	−sin 10° 17′=	−.179
2 ..sin 250° 17′=	−sin 70° 17′=	−.941
3 ..sin 310° 17′=	−sin 49° 43′=	−.763

This is the natural manner of proceeding in the calculation; in reality it is much simpler, if we note that after the sixth hour in the first wave, after the third hour in the second, and second hour in the third wave the angles become the complementary of the former angles. Hence it is sufficient to determine the angles up to the fifth hour, inclusive, in the first wave; up to the second hour in the second, and the first hour in the third wave; and without paying attention to the rest, take at once from the trigonometrical tables the value of the sine of each of those angles and their complementaries, which are found at the end of the same line. For example, for the zero hour in the first wave of January we find the value of the sine of 13° 46′, namely 0.238, and at the end of the same line we find the value 0.971 which is that of the sine of the complementary angle 76° 14′, which we write in front of the sixth hour.

In order to find the ordinate for the zero hour of January by means of Father Dechevrens' tables, we have to apply the following formula:

$$(0-12).083+(1-13).08+(2-14).072+(3-15).059+(4-16).042+(5-17).022+(7-19)\times-.022$$
$$+(8-20)\times-.042+(9-21)\times-.059+(10-22)\times-.072+(11-23)\times-.08$$

substituting the values for the hours in parentheses, and performing the proper operations. In the present case after having made the subtractions in the parentheses, we have

$$.31\times.083+.8\times.08+1.05\times.072+1.1\times.059+1.04\times.042+.89\times.022-.84\times.022-.87\times.042$$
$$-.79\times.059-.58\times.72-.2\times.08=0.1341$$

By the natural method we can obtain the same result, after the values of the trigonometrical lines have been found, by one single multiplication:

$$0.238\times0.564=0.1342$$

Of course, Father Dechevrens' method is less exposed to errors, as it reduces the work to simple arithmetic; but we think that a little practice in trigonometrical calculation would be sufficient to save time by the natural method.

Epoch of the critical phases (*maxima and minima*).—The determination of the epochs of the critical phases offers no difficulty. As every ordinate is expressed by

$$u \sin(U+x)$$

the necessary and sufficient condition in order that this value be a maximum is that the sine, which appears in the general expression, be equal to unity, which leaves as condition for the maximum

$$U+x=90^\circ \text{ or } 450^\circ$$

according as U is less or greater than 90°. This being supposed, let us remember that the variable element x has for the successive hours 0, 1, 2, 3, ... h, in the first curve, the values 0°, 15°, 2×15°, 3×15°,................. $h\times15°$; and in the same way for the second, third, and fourth curves, this variable has for any hour the value $h\times30°$,

$h\times45°$, $h\times60°$, respectively. We will now determine the epochs of the first maximum for the four January curves.

For the first we have as condition:

$$13°\ 46'+h\times15°=90°.\ \therefore h=\frac{90°-13°\ 46'}{15}=\frac{76°\ 14'}{15}=5^h\ 5^m$$

for the second:

$$164°\ 37'+h\times30°=450°.\ \therefore h=\frac{450°-164°\ 37'}{30}=9^h\ 31^m$$

for the third:

$$11°\ 1'+h\times45°=90°.\ \therefore h=1^h\ 46^m$$

and fourth:

$$130°\ 17'+h\times60°=450°.\ \therefore h=5^h\ 20^m$$

When we have determined the epoch of the first maximum, we have determined the epochs of all the other critical phases, because they are twelve hours distant in the first curve, six in the second, four in the third, and three in the fourth. The epochs of the first maximum for the four curves in the different months are given below.

Epoch of the first maximum.

Month.	First wave.	Second wave.	Third wave.	Fourth wave.
	H. m.	*H. m.*	*H. m.*	*H. m.*
January	5 5	9 31	1 46	5 20
February	5 47	9 41	1 44	5 24
March	5 23	9 45	1 10	5 37
April	5 3	9 44	0 49	5 38
May	4 10	9 44	7 15	5 59
June	3 11	9 49	6 20	0 0
July	2 57	9 52	6 27	5 32
August	3 9	9 51	6 52	4 49
September	3 25	9 41	1 23	4 38
October	4 16	9 30	1 11	4 42
November	4 20	9 25	1 19	4 42
December	4 26	9 26	1 40	4 46

DISCUSSION.

In what has preceeded we have resolved the diurnal oscillation of pressure in Manila into a series of simple harmonic oscillations, the first two of which, viz, of twenty-four and twelve hour periods, are of incomparably more importance than those of eight and six hour periods, so that the principal characteristics of the diurnal oscillation of pressure are represented almost exclusively by the first two.

But this analysis of the curves is in itself nothing more than an artifice in calculation, for every periodic curve can be treated by it. Hence, the component harmonic curves may have a purely mathematical meaning without corresponding to anything in reality.

Helmholtz in treating of this class of analysis says: "It is only a mathematical fiction; admirable, because it renders calculation easy, but not necessarily corresponding with anything in reality." Nevertheless, speaking in general, the practical utility of this analysis cannot be denied.

A periodic phenomenon can only be the result of periodic causes of periods the submultiple of that of the phenomenon; otherwise the periodicity would be disturbed. By means of this analysis, the curve is resolved into the only possible elementary ones with periods which are submultiples of the original one, and hence it is most probable that the partial causes which influence the phenomenon will appear either totally, or in their principal characteristics in the manner in which the elementary curves vary.

If it is required to ascertain whether or not two phenomena are related, the study of the characteristic harmonic curves of both is the only process by which we can come to this knowledge; the fact that there may appear no trace of mutual relation in the observation curves does not mean very much, for the influence which the one may exercise on the other may easily be disguised by other causes which are acting at the same time.

Even though we may deduce nothing more from the comparison of two phenomena by means of this analysis than the persuasion that there is no relationship between them, our labor would not have been thrown away.

Coming to the particular case of the barometer Dr. Julius Hann [1] says:

> I was myself convinced that all the attempts to explain the diurnal barometric oscillation by means of the daily variations of the meteorological elements at any one place, as attempted by Kreil, Blanford, Renou, and others, could lead to no conclusion; and I have published a series of papers giving a precise description of the phenomenon as manifested over the whole earth, at sea level as well as at all elevations for which observations exist, and I have endeavored to give the results in such a form as would be suited for the basis of a physico-mathematical theory. With this object I have represented all the results of observations in periodical functions, and have calculated the amplitudes and phase epochs of the individual waves, whatever was their period, and which, when combined together, produce the complex result of the daily barometric curve, such as presents itself to direct observation. * * * This is the only method which has enabled us to make material progress in the comprehension and explanation of the whole problem.

What we propose to do principally is to compare the results obtained for Manila with those of other regions, and hence we will put the following discussion in such a form as to make this comparison easy:

First wave.—One of the most fundamental facts that have been established in the science of meteorology is that the lower strata of the atmosphere receive their heat from the surface of the earth by means of conduction, and then transmit it to the layers immediately above by convection. This movement of convection is chiefly ascending; the air expands laterally in the higher atmosphere and causes a fall of the barometer. The opposite takes place with the cooling of the surface of the earth; the air in contact with it is cooled, contracts, thus causing descending currents and a rise of the barometer; therefore by virtue of this variation of temperature there must be produced a maximum and a minimum in the atmospheric pressure about the hours of minimum and maximum temperature.

The exchange of heat between the surface of the earth and the lower layers of the atmosphere is of a periodic character, the principal period being one of twenty-four hours. We say *principal* period, because this variation is not simply harmonic; so that if it were to be analyzed separately it would not be represented by a simple harmonic motion, but, in addition to a fundamental component of a twenty-four hour period, there would result others less important of twelve, eight, six, ... hour periods.

The first wave in the analysis of the barometric curve is one of a twenty-four hour period, and invariably presents the maximum and minimum about the hours of minimum and maximum temperature. This general character of the curve makes it likely that it represents the principal character of the variation of pressure, caused by the exchange of heat between the surface of the earth and the lower layers of the atmosphere.

Both the amplitude and the epochs of the critical phases of this wave present special characteristics in Manila, which it is well to note. The amplitude is less and the epoch of the maximum occurs earlier than in the greater number of the stations for which

[1] Further contributions to the foundation of a theory of the daily barometric oscillation. Q. Journal of the Roy. Met. Soc., London, 1899, p. 40.

this analysis has been made. Hann made note of these peculiarities for Mauritius, Singapore, and Batavia in his "Untersuchungen über den täglichen Gang des Barometers."

Mr. Eliot includes in the following table these three stations, together with several others, studied by him in India, in order to compare them with Trivadrum, the only station in India which presents these characteristics. To these we add Manila for comparison.

Station.	North latitude.	Amplitude u_1 for mean of year.	Epoch of maximum.	Phase U_1 for mean of year.	Station.	North latitude.	Amplitude u_1 for mean of year.	Epoch of maximum.	Phase U_1 for mean of year.
	° ′		H. m.	° ′		° ′		H. m.	° ′
Trivandrum	8 31	0.413	4 36	21 2	Allahabad	25 26	0.774	7 38	335 33
Madras	13 4	.595	6 1	359 38	Magpur	21 9	.767	7 4	343 52
Bombay	18 54	.472	7 56	330 53	Lahore	31 34	.667	8 32	322 2
Rangoon	16 46	..685	6 20	355 3	Mauritius	20 6S	.310	2 54	46 35
Chittagong	22 21	.582	6 50	347 45	Singapore	1 17	.531	4 18	25 35
Calcutta (Alipore)	22 32	.667	6 56	346 5	Batavia	6 11S	.626	4 19	25 17
Kurrachee	24 47	.497	7 5	343 49	**Manila**	14 35	.544	4 15	25 58
Aden	12 45	.779	7 26	338 24					

Mr. Eliot terminates his discussion of this first wave with the following words:

The first component of the diurnal oscillation at Trivandrum, hence, exhibits characteristic features differing largely from those of other stations in India, but resembling strongly those at Batavia and Singapore and (to a less extent) Mauritius. The chief features are its small amplitude and the early epoch of the maximum phase. These are probably due mainly, if not entirely, to its maritime position and low latitude.

The similarity which Mr. Eliot makes mention of as existing between Trivandrum, Batavia, and Singapore appears much more marked in the case of Manila, both in the amplitude and initial phase as well as the epoch of the maximum, and consequently Manila is an example which confirms the conjecture concerning these properties in coast stations of low latitudes.

Annual variation of u_1.—The annual variation of u_1 and the annual variation of the absorption of heat in the lower layers of the atmosphere have between them the relation of cause and effect, as was pointed out by Hann ("Untersuchungen, etc.") and Angot ("Annales du Bureau central Meteorologique de France," 1887, p. B. 297), and confirmed by the work of Mr. Eliot in Indian Meteorological Memoirs, Vol. XII, p. 374.

A little consideration will show that the same takes place in Manila. In the "Climatología" published by Rev. José Coronas in the "El Archipiélago Filipino" it is shown that the months of February, March, and April are the driest and least cloudy months of the year, while July, August, and September are the rainiest and cloudiest. These circumstances are extremely favorable during the first three months for the absorption of heat in the lower layers of the atmosphere, and very unfavorable during the last three months, in that the clouds intercept a large amount of the calorific energy, and of that which passes to the surface of the earth, some is converted into latent heat of evaporation.

A glance at the values of u_1 makes it clear that the three months during which it reaches its maximum are February, March, and April, in which the absorption of the calorific energy in the lower layers of the atmosphere must be a maximum; and it reaches its minimum values in July, August, and September when the absorption is least.

Mr. Eliot mentions in the publication already cited that during the transition period between the rainy and dry seasons a relative maximum of the value of u_1 usually takes place. This relative maximum appears in Manila in October which may be considered as the border month between the two seasons.

The second wave.—There are two characteristics which are noteworthy in this wave; first, that it is much more important than the others in all the months and in all the

regions where it has been studied, and, secondly, the constancy of the epoch of the critical phases.

In the following table are given the epochs of the first maximum found by Mr. Eliot for several stations of India:

North latitude.	Station.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
° ′		H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.
8 31	Trivandrum	9 30	9 38	9 34	9 36	9 37	9 42	9 47	9 41	9 29	9 16	9 14	9 22
10 50	Trichinopoly	9 50	9 59	9 59	9 58	9 52	9 52	9 53	9 53	9 48	9 38	9 39	9 47
13 04	Madras	9 45	9 52	9 50	9 49	9 48	9 53	9 57	9 53	9 39	9 28	9 27	9 33
18 54	Bombay	9 43	9 51	9 53	9 54	9 54	10 2	10 6	9 57	9 45	9 25	9 23	9 36
24 47	Kurrachee	9 41	9 58	9 58	9 57	9 58	10 10	10 9	9 51	9 49	9 28	9 29	9 35
34 10	Leh	9 48	10 3	10 6	9 58	9 52	9 50	9 58	10 22	9 47	9 49	9 49	9 49
Mean value for tropical India		9 42	9 53	9 50	9 47	9 47	9 54	9 58	9 55	9 41	9 29	9 28	9 36
14 35	**Manila**	9 31	9 41	9 45	9 44	9 44	9 49	9 52	9 51	9 41	9 30	9 25	9 26

This wave with its double daily oscillation is the one which produces the characteristic tides of the barometer. It is therefore of the greatest possible interest to discover its cause.

The discussions of Hann, Angot, and Lord Kelvin on this point are too voluminous to reproduce here in all their details, so we will try and summarize them as shortly and clearly as possible.

The phenomenon, represented by this wave must have the two properties, viz, that it have greater influence on the barometer than any other, and, secondly, that it be independent of local influences.

From the outset, it is evident that the cause of this phenomenon can have no other origin than the influence of the sun on the terrestial atmosphere. "But," says Lord Kelvin, "it cannot be owing to the gravitational tide-generating influence of the sun, since we would have a much greater influence of the same kind due to the moon, whereas in reality the lunar barometric tide is insensible or nearly so." It appears therefore certain that it must be attributed to the variation of the temperature. But this variation in the lower layers of the atmosphere is subject to all possible variations caused by local circumstances of the different stations, whereas the periodic action of solar rays on the higher layers, recurring day by day, must necessarily produce periodic movements of great regularity.

This easily explains the regularity of this wave. What does not appear so clearly is the reason of its diurnal double oscillation and its great amplitude. The oscillation of the temperature in the higher layers of the atmosphere must be analogous in its general form to the oscillation of the temperature in the lower layers, since the causes which produce them are the same—the insolation during the day and the radiation during the night. The first causes the maximum to take place shortly after the sun has reached its maximum altitude, and the second produces the minimum shortly before sunrise. How, therefore, can this thermic oscillation of one maximum and one minimum give rise to the double barometric oscillation which we are studying?

To solve this problem, Hann has recourse to the only means which exists for ascertaining the relation between two phenomena. He resolves the diurnal variation of the temperature into its harmonic components, and finds that of the two principal waves, the first (of twenty-four hour period) appears constantly with an amplitude greater than the second (of a twelve hour period) opposite to what takes place with the pressure. For example—

	u_1	u_2
Latitude 6° 0′, equatorial Pacific	0.°87	0.°11
Latitude 16° 0′, tropical Pacific	1.°39	0.°31
Latitude 33° 0′, subtropical Pacific	0.°97	0.°25
Latitude 48° 12′, Temperate Zone (Vienna)	2.°86	0.°51

In spite of this disagreement in the harmonic components of the two phenomena, Hann did not hesitate to assign as cause of the double oscillation of the barometer this double oscillation of the temperature.

When this assertion of the eminent meteorologist was published, two difficulties were raised by scientists: First, that the thermic variation analyzed was that of the lower layers of the atmosphere, whereas the point at issue was the variation in the higher layers and of this it was questionable whether the oscillation was of exactly the same character as in the lower. The second difficulty was that this double daily temperature wave was only a result of calculation, a mathematical fiction, which could not serve in the explanation of a real phenomenon. There is in reality, no daily variation of temperature with two maxima and two minima; and if we, in spite of this, obtain a double daily temperature wave, because we insist on representing the daily march of temperature by a series of sines, this forced mathematical form can never serve to explain an observed phenomenon, whereas for this some real natural process must be sought for as a cause.

The first difficulty is solved by what was said before concerning the variation of the temperature in the higher layers of the atmosphere; the causes which produce it are the same; therefore it must be of the same general form as that observed in the lower.

The solution of the second difficulty requires a little more explanation. It is known that if a limited mass of liquid or gaseous fluid be set in simple pendulumlike oscillations, the amplitude of these oscillations are governed by the conditions proper to the fluid (its dimensions, temperature, etc.), so that if the mass of fluid receives a single impulse, it will always move with that class of undulations which is possible to it by reason of its peculiar conditions. These oscillations are commonly called *free oscillations.*

If the impulse recurs periodically, then the mass is forced to take up oscillations of that period, even though these new oscillations do not coincide with any of the forms of oscillation which belong to the free waves. If this periodic impulse is not of a simple harmonic character—that is to say, if it cannot be represented by a simple sine curve—then it can be resolved, according to Fourier, into its harmonic components of periods 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., so that the effect due to the impulse would be the same as that produced by several simple harmonic impulses acting together. It is quite immaterial to the question whether or not these component impulses exist in practice; it is sufficient if the real impulse can be considered as the resultant of them.

If the period of one of these component impulses coincides with that of the free waves of the mass of the fluid, then the resulting forced oscillation will attain a disproportionately great amplitude; so that although the amplitude of this impulse be relatively small compared with that of the other component impulses, the effect produced by it is much larger; whence it appears that if the resulting complex oscillation be analyzed by means of a sine series, the harmonic curve corresponding to the free oscillations will be of large amplitude, while the corresponding wave in the analysis of the impulse will be of small amplitude, and yet, that is no reason why the second cannot be the cause of the first.

To come now to the case before us: The curve which represents the diurnal variation of the temperature in the higher strata of the atmosphere must necessarily be asymmetrical, because its two causes, insolation and radiation, which depend on the duration of day and night, are asymmetrical. If, therefore, on analyzing it, we find that it is reproduced almost exclusively by the combination of the two harmonic components of periods of twenty-four and twelve hours, then we may consider the real variation which we actually observe as the resultant of two harmonic variations of the temperature; one of a twenty-four hour period and the other of twelve; and it does not really matter whether or not there actually exist two causes, which give rise to these two variations; it is

enough for our proposition that the phenomenon be reproduced in the same manner as if they really existed.

Doctor Margules, following the indications made by Lord Kelvin, undertook the difficult and laborious task of calculating the oscillations caused in the atmosphere by its periodic heating and cooling.[1] In the first of his papers he showed that the period of free oscillation of our atmosphere is nearly twelve hours.

These studies and conclusions of Doctor Margules have been received with a good deal of enthusiasm and have been the occasion of several interesting publications such as Paul Jaerisch's "Zur Theorie der hydrodynamischen Gleichungen in sphärischen Koordinaten" (Meteorologische Zeitschrift, 1907, pp. 481–498); Trabert's "Die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules, und die tägliche Oszillation der Luftmassen" (Met. Zeit., 1903, pp. 481–501); W. J. Humphreys' "On the diurnal variations of atmospheric pressure" (Bulletin of the Mount Weather Observatory, 1912, vol. 5, part 2, pp. 132–156) and the most complete of all, Horace Lamb's "Atmospheric Oscillations" (Proc. Royal Society, 1911, vol. 84, pp. 511–572).[2]

We can, therefore, explain the double oscillation and the great amplitude of the second wave thus: When the atmosphere receives a thermic impulse (if we may make use of this expression) there is produced in it the same effect as would be produced by two simultaneous impulses which could be reproduced by sine curves of twenty-four and twelve hour periods, respectively. The amplitude or intensity of the second is less than that of the first, but the oscillations which it causes in the atmosphere must be of great amplitude because its period coincides with that of the free oscillations; while the oscillations produced by the first are considerably reduced because their period does not coincide with that of the free oscillations.

The hypothesis that the second wave is due to the absorption and radiation of heat in the higher strata of the atmosphere is confirmed by the comparison of the annual variation

---

[1] "Über die Schwingungen periodisch erwarmter Luft." (Sitzungsberichte, Wien. Akad. Marz, 1890.)

"Luftbewegungen in iener rotirenden Spharoidschale." (Ibid. April, 1890; Jan. and Dec., 1893.)

[2] This work was already in the press when the Observatory was in receipt of Prof. Frank H. Bigelow's "The Thermodynamics of the Circulation and Radiation of the Earth's Atmosphere" published as Bulletin No. 3 of the Argentine Meteorological Office. On page 15, he proposes two difficulties against Lord Kelvin's theory; first, that the semidiurnal pressure waves disappear within 2,000 meters of the surface; and, secondly, that the heat term ($Q_1 - Q_0$) is not included in the general equation of motion as employed by Margules, Jaerisch, and Gold. It is not the first time that Professor Bigelow has impugned this theory; see, for example, his "Studies on the diurnal periods in the lower strata of the Atmosphere" (Monthly Weather Review, 1905, p. 93) and chapter 9, p. 458, of his "Report on the international cloud observations." At the same time it is not to be supposed that scientists like Lord Kelvin and Hann were ignorant that the semidiurnal oscillation diminishes with altitude till it disappears or becomes almost imperceptible, and yet, notwithstanding this, these scientists did not hesitate to establish their theory. Hence, it must be supposed the semidiurnal oscillation reappears in the higher atmosphere. Mr. Ernest Gold seems to indicate this in his interesting memoir "The International Kite and Balloon ascents" which won the first prize offered by the German Meteorological Society in 1908. For, on page 120, he says: "Hence changes of pressure at the earth's surface are connected with changes in the opposite direction in the stratosphere, which give rise to currents flowing between the stratosphere and troposphere."

The second difficulty would seem to indicate that the three eminent mathematicians had overlooked the influence which the free heat term could have on the general equation of motion, whereas Doctor Margules, after introducing into the differential equation of motion the free heat term, proceeds thus: "For our purpose it will be more convenient to consider the pressure variations as a consequence of the temperature variations, not as a consequence of the variable flow of heat. We, therefore, return to equation (4*a*)," where the term of which Professor Bigelow speaks certainly does not enter.

of these two factors and that of the amplitude u_2. A brief explanation of this will suffice for our purpose.[1]

One of the most important factors in the influence which the absorption and radiation may have on changes of pressure, is the presence or absence of clouds in the atmosphere. The amount of heat absorbed by a dry and clear atmosphere is employed in expanding it, thus causing lateral and ascending currents, which are shown on the barometer by changes of pressure. On the other hand, the calorofic energy which reaches an atmosphere charged with clouds is converted, in great part, into latent heat of evaporation, which can not have any effect on the pressure. Hence, in the dry season the changes of pressure due to these causes will be greater than during the wet season, on account of the great difference of cloudiness between these two seasons.

This difference in the values of u_2, which are constantly greater during the months constituting the dry season than during the months of wet season, is seen quite clearly in Table V, as is also the difference in values in the perfectly defined separation of the two seasons from May to June.

We will terminate the discussion of this wave by comparing its principal characters in Manila with those of the stations mentioned in connection with the first wave.

The following table is copied from Volume X of Indian Meteorological Memoirs, page 74, with the exception that we have converted the original observations in inches to millimeters in order to facilitate the comparison:

Station.	Mean amplitude u_2.	Mean epoch U_2.		Mean epoch of maximum.	Ratio of maximum to minimum value of u_2.	Month of maximum u_2.	Month of minimum u_2.	Epoch of u_2. Earliest.		Epoch of u_2. Latest.		Month of earliest epoch.	Month of latest epoch.
	mm.	°	′	H. m.				H.	m.	H.	m.		
Trivandrum	1.100	164	14	9 32	1.4	February	July	9	14	9	47	November	July.
Madras	1.115	158	5	9 44	1.2	March	do	9	27	9	57	do	Do.
Bombay	.977	156	51	9 46	1.5	February	do	9	15	9	58	do	Do.
Rangoon	1.023	153	3	9 54	1.4	March	do	9	37	10	12	{do December}	August.
Chittagong	.946	148	5	10 4	1.3	April	June	9	39	10	19	November	{March. August.
Calcutta	1.028	147	50	10 4	1.3	March	July	9	41	10	24	do	July.
Kurrachee	.797	155	40	9 49	1.6	February	June	9	28	10	10	October	June.
Aden	.908	159	59	9 40	1.5	November	do	9	20	9	58	do	April.
Allahabad	.918	150	13	9 59	1.2	March	do	9	37	10	17	November	August.
Magpur	1.010	154	44	9 51	1.4	do	July	9	28	10	10	October	July.
Lahore	.628	138	18	10 23	1.3	February	do	9	56	10	36	do	{February. July.
Mauritius	.733	163	44	9 32	1.2	October	do	9	20	9	45	November	February.
Singapore	.995	156	18	9 47	1.3	{March April}	do	9	31	9	58	do	July.
Batavia	.959	159	56	9 40	1.2	October	do	9	25	9	54	do	February.
Manila	.919	160	5	9 40	1.4	{March April}	do	9	25	9	52	{do December	{July. August.

From this table one can appreciate in a general way the constancy of the principal characteristics of this wave in the different stations; the almost perfect agreement in

[1] See a more detailed discussion of this point in Vol. XII of "Indian Meteorological Memoirs," pages 328–347.

The following may also be consulted: "Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere" by Langley in No. 15 of "Professional Papers of the Signal Service," and in Vol. I of "Annals of Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution," and "Preparatory Studies for Deductive Methods in Storm and Weather Predictions" by Cleveland Abbe.

the ratio between the maximum and minimum amplitude, and the epoch of the year in which the minimum takes place, is especially evident.

A few discrepancies will, however, be noted, which show that this wave is not quite free from the influence of local circumstances. Thus, for example, in some regions the amplitude has two maxima and two minima in the year, while in others, Manila among them, this double variation disappears. In stations like Batavia, Mauritius, and Aden which have the absolute maximum in October or November, there is another relative maximum in March or April.

The reason of these variations is fairly obvious. The second wave, as it is given by analysis, must be a complex wave resulting from the interference of two with the same period of twelve hours. One of these (which we will call *principal semidiurnal wave*) is the product of the variations of temperature in the higher strata of the atmosphere, as was explained above; the other (*secondary semidiurnal wave*) represents the oscillations which the semidiurnal component of the temperature in the lower strata must produce in the pressure. The first of these two presents, according to Hann and Angot, a double variation during the year, with maxima at the equinoxes and minima at the solstices. The second, which is more irregular and of less amplitude than the first, owing to local influences, has one maximum only (during the dry season) and one minimum (in the wet season).

It is easy to see that the interference of these two waves can cause the complete or almost complete disappearance of the double annual variation in the wave we are discussing; for the autumn equinox occurs usually in the wet season in the great majority of the stations, and the winter solstice generally occurs about the beginning of the dry season, so that the maximum and minimum corresponding to these epochs in the principal wave are held back either entirely or in great part, because they coincide with the epochs of the minimum and maximum amplitude of the secondary wave. The opposite happens in the summer solstice and the spring equinox, because they coincide with the wet and dry seasons respectively.

M. Angot, in the publication already cited (p. B311 sq) proposes an ingenious method for the separation of these two waves. It would take up too much space to explain the whole proceeding, so we simply give in the following table the results obtained by his method for Manila.[1]

[1] The formula we finally obtain by this method of Angot is

$$0.^{mm}926 \frac{h \cos^2\delta}{760 r^2} \cos^4\lambda \cos(2m+64°-2\epsilon)$$

where h represents the mean pressure; δ the declination of the sun; r the radius of the earth's orbit; λ the latitude of the place; m the different hours expressed in degrees; ϵ the equation of time. The values which we have taken for these quantities are:

h=759.10 λ=14° 35′

	2ϵ	$\frac{\cos^2\delta}{r^2}$
January	+4° 48′	0.9033
February	+7° 01′	0.9722
March	+4° 19′	1.0043
April	+0° 02′	0.9597
May	−1° 46′	0.8734
June	+0° 08′	0.8197
July	+2° 41′	0.8424
August	+1° 50′	0.9208
September	−2° 32′	0.9852
October	−7° 00′	0.9806
November	−7° 08′	0.9193
December	−1° 56′	0.8746

Principal semidiurnal "wave" (unit 0.01).

Hour.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
0	+38	+43	+41	+34	+29	+29	+33	+35	+32	+26	+24	+29
1	+ 1	+ 4	0	− 5	− 7	− 4	− 2	− 3	− 9	−15	−15	− 7
2	−36	−36	−40	−44	−41	−37	−36	−40	−48	−52	−49	−42
3	−63	−66	−70	−70	−65	−60	−60	−66	−73	−75	−71	−65
4	−73	−79	**−82**	−78	−71	**−66**	−68	−75	**−80**	−78	−73	**−71**
5	−64	−70	−71	−65	−58	−55	−58	−63	−64	−60	−55	−58
6	−38	−43	−41	−34	−29	−29	−33	−35	−32	−26	−24	−29
7	− 1	− 4	0	+ 5	+ 7	+ 4	+ 2	+ 3	+ 9	+15	+15	+ 7
8	+36	+36	+40	+44	+41	+37	+36	+40	+48	+52	+49	+42
9	+63	+66	+70	+70	+65	+60	+60	+66	+73	+75	+71	+65
10	+73	+79	**+82**	+78	+71	**+66**	+68	+75	**+80**	+78	+73	**+71**
11	+64	+70	+71	+65	+58	+55	+58	+63	+64	+60	+55	+58
12	+38	+43	+41	+34	+29	+29	+33	+35	+32	+26	+24	+29
13	+ 1	+ 4	0	− 5	− 7	− 4	− 2	− 3	− 9	−15	−15	− 7
14	−36	−36	−40	−44	−41	−37	−36	−40	−48	−52	−49	−42
15	−63	−66	−70	−70	−65	−60	−60	−66	−73	−75	−71	−65
16	−73	−79	**−82**	−78	−71	**−66**	−68	−75	**−80**	−78	−73	**−71**
17	−64	−70	−71	−65	−58	−55	−58	−63	−64	−60	−55	−58
18	−38	−43	−41	−34	−29	−29	−33	−35	−32	−26	−24	−29
19	− 1	− 4	0	+ 5	+ 7	+ 4	+ 2	+ 3	+ 9	+15	+15	+ 7
20	+36	+36	+40	+44	+41	+37	+36	+40	+48	+52	+49	+42
21	+63	+66	+70	+70	+65	+60	+60	+66	+73	+75	+71	+65
22	+73	+79	**+82**	+78	+71	**+66**	+68	+75	**+80**	+78	+73	**+71**
23	+64	+70	+71	+65	+58	+55	+58	+63	+64	+60	+55	+58

NOTE.—Black-face type indicates maximum or minimum.

We cannot compare our results with those of other regions because we do not know whether this analysis has been worked out for others than the nine calculated by Angot, and for these Angot took only one or two months; nevertheless, we think it useful to have proved for Manila this character attributed to the principal semidiurnal wave.

Third wave.—There are only two possible hypotheses with regard to the origin of this wave, viz:

1. That it is produced by an independent action of an eight-hour period.
2. That it is part of the effect due to the causes producing the first wave; since, as was indicated in the discussion of this wave, its causes cannot be represented by a simple harmonic motion.

The first objection against the first hypothesis is that no independent physical action of an eight-hour period is known. And it may be added that the amplitude of the third component is very small, resembling in character that of a residual rather than the total effect due to an independent cause.

In confirmation of these general reasons is the property which is noted in this wave in all regions, namely, that the annual variation of its amplitude and the epoch of its critical phases follow a law like to the one for the first wave, with this particular, that the sign of this variation is almost absolutely opposite, which raises the suspicion that the third wave is a correction of the values of the first.

Given the slight influence which this as well as the fourth wave can have on the barometric variation, we believe that it is scarcely worth while discussing the matter. We do not wish, however, to omit a peculiarity of the third wave, noted by Doctor Hann, which is, that toward the equinoxes the epoch of the phases undergoes a notable inversion, and that this inversion coincides exactly with the epoch of the minimum amplitudes. This property appears well marked in Manila; the inversion, spoken of by Doctor Hann, takes place from April ($0^h\ 49^m$) to May ($7^h\ 15^m$) and from August ($6^h\ 52^m$) to September ($1^h\ 23)^m$; the minima of the amplitude also take place in April–May and August–September, as may be seen in Table V.

CONCLUSION.

From what has been said up to the present, it is deduced that the modern theory of the double daily oscillation of the barometer supposes two causes of the phenomenon. The one is quite free from local influences, and is precisely the one which introduces into

the barometric curve that double oscillation which has always been so mysterious to those who have examined its cause. It is represented by what we have called the principal semidiurnal wave, and is due to the variation of the temperature in the higher layers of the atmosphere. The other varies according to the local circumstances of each region, in that it is due to the variation of temperature in the lower layers. The curve representing it is usually called the thermic wave. In the following table we give its values for all the months of the year; they are obtained by subtracting the principal semidiurnal wave from the observed variation (Table III):

Diurnal or thermic "wave" (unit 0.01).

Hour.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
0	+ 8	+ .6	+ 18	+ 27	+ 33	+ 39	+ 32	+ 25	+ 25	+ 24	+ 22	+ 18
1	+ 16	+ 15	+ 22	+ 35	+ 42	+ 40	+ 26	+ 25	+ 28	+ 23	+ 25	+ 25
2	+ 16	+ 22	+ 28	+ 34	+ 35	+ 32	+ 26	+ 27	+ 31	+ 27	+ 23	+ 17
3	+ 18	+ 30	+ 35	+ 40	+ 38	+ 38	+ 30	+ 29	+ 31	+ 31	+ 16	+ 16
4	+ 33	+ 41	+ 48	+ 53	+ 45	+ 38	**+32**	**+33**	**+33**	+ 29	+ 22	+ 26
5	+ 44	+ 53	+ 58	+ 67	+ 50	+ 37	+ 29	+ 32	**+33**	+ 30	+ 26	+ 34
6	+ 54	+ 68	+ 74	+ 72	+ 53	**+41**	**+32**	+ 29	+ 27	+ 40	+ 39	+ 38
7	+ 64	**+76**	**+84**	**+ 82**	**+57**	+ 38	+ 30	+ 25	+ 26	**+43**	+ 44	+ 48
8	**+76**	**+76**	**+84**	**+ 82**	+ 51	+ 25	+ 17	+ 19	+ 28	+ 39	**+48**	**+62**
9	+ 72	+ 75	+ 74	+ 68	+ 38	+ 11	+ 4	+ 8	+ 16	+ 36	+ 47	+ 57
10	+ 49	+ 56	+ 48	+ 46	+ 19	− 3	− 9	− 7	+ 3	+ 25	+ 29	+ 35
11	+ 15	+ 20	+ 22	+ 18	− 1	− 19	− 19	− 14	− 6	− 1	+ 7	+ 8
12	− 23	− 16	− 11	− 9	− 20	− 29	− 27	− 24	− 25	− 21	− 24	− 23
13	− 64	− 55	− 50	− 53	− 49	− 44	− 36	− 39	− 47	− 46	− 53	− 62
14	− 89	− 80	− 79	− 84	− 71	− 55	− 42	**−42**	− 50	− 62	**−70**	− 81
15	**−92**	**−91**	**−95**	− 99	− 82	− 65	− 46	**−42**	**−53**	**−65**	− 67	**−82**
16	− 71	− 77	− 88	**−104**	**−88**	**−67**	**−48**	− 41	− 42	− 49	− 54	− 63
17	− 45	− 57	− 74	− 96	− 77	− 57	− 41	− 36	− 34	− 36	− 37	− 37
18	− 30	− 44	− 64	− 76	− 55	− 40	− 30	− 26	− 24	− 36	− 32	− 26
19	− 20	− 39	− 57	− 59	− 39	− 24	− 18	− 19	− 20	− 31	− 20	− 13
20	− 11	− 31	− 45	− 48	− 25	− 11	− 10	− 12	− 14	− 15	− 6	− 4
21	− 7	− 23	− 27	− 25	− 5	+ 5	+ 4	+ 1	+ 2	− 4	− 2	+ 1
22	− 9	− 18	− 12	+ 5	+ 20	+ 28	+ 26	+ 22	+ 14	+ 7	+ 5	+ 1
23	− 5	− 8	+ 6	+ 22	+ 34	**+44**	**+37**	+ 29	+ 19	+ 17	+ 13	+ 5

NOTE.—Black-face type indicates maximum or minimum.

In Plates XIII and XIV may be seen the curves which represent the thermic wave and the principal semidiurnal wave for several months.

These are doubtless the two waves mentioned by M. Angot in his "Traité élémentaire de Météorologie," page 104, in his explanation of the diurnal variation of the barometer.

Without knowing exactly of what waves is being treated, it is difficult to grasp thoroughly this explanation, hence we have thought it good to translate it in this place; for, besides making it easier to understand with the curves before us, it will also serve as a discussion of our curves.

"The diurnal variation of the barometer has not as yet been completely explained. The most recent researches seem to indicate that it is the result of the superposition of two distinct oscillations—one which gives two maxima and two minima each day and whose period is consequently half a day, and which is called, therefore, the semidiurnal *oscillation or wave;* the other which gives only one maximum and one minimum in the twenty-four hours, and which is called the diurnal wave.

"The two daily maxima of the semidiurnal wave ought to be equal to one another, and the two minima likewise equal to each other. In all the seasons of the year and in all parts of the earth the two maxima take place about 10 o'clock, morning and night; the two minima about 4 o'clock, morning and afternoon. The difference between the maxima and the minima of the semidiurnal wave—that is to say, the amplitude of this wave[1] varies but little for the same station during the course of a year; it is greatest at the equinoxes and smallest at the solstices. This amplitude does not depend on the topographical conditions, but solely on the latitude—about 2 mm. at the equator, it then

[1] M. Angot understands here by the amplitude of the wave, the amplitude of a complete oscillation; other authors and Angot himself, in the publication we have quoted several times, takes as the amplitude of the wave, the amplitude of a semioscillation, or the maximum ordinate of the curve.

diminishes slowly up to the Tropics, and afterwards very rapidly so that in high latitudes it is very small. It is probable that this semidiurnal wave is caused by the action of solar heat on the whole mass of the atmosphere, but up to the present time the manner in which it is produced has not been explained satisfactorily.

"While the semidiurnal wave is the same for all regions situated in the same latitude, the diurnal wave has a very variable amplitude, which depends on the topographical conditions of the region, and which may be very different even in neighboring stations. In general, it is much weaker in coast stations than in continental stations, and its amplitude is in direct ratio to the amplitude of the diurnal variation of the temperature. The hours of the maximum and minimum vary greatly according to the countries and the seasons of the year; the maximum takes place earlier in summer than in winter; its mean epoch is about 9^h; the minimum, on the contrary, whose mean epoch is about 16^h, takes place earlier in winter than in summer. The period of falling, therefore, lasts on an average only seven hours, while the period of rising extends to seventeen hours; the rise is not uniform during this time for it is rapid immediately after the minimum, is slow during the night, and then increases rapidly again between sunrise and the maximum.

"While the theory of the semidiurnal wave has not been explained as yet [1] the diurnal wave, on the contrary, is fully explained by the local effect of the daily variation of the temperature. During the night, the lower layers of the atmosphere contract as they are cooled and, in order to fill the space thus produced by the contraction, air from all sides, especially from above, flows in. After sunrise the lower layers are warmed rapidly and tend to expand; but the heating is produced first in the layers in contact with the surface of the earth, so that the layers of air between the superficies and the higher layers which have not been heated as yet, do not at first increase their volume appreciably; just as happens when the air in a closed chamber is warmed, the rise of temperature is manifested principally by an increase of pressure in the same way the first effect of the diurnal heating is an increase of pressure in the layers which are in contact with the surface of the ground, and the barometer begins to rise.

"A little later, between 7 and 11 o'clock in the morning, according to the countries and season of the year, the heating of the lower layers is sufficient to determine a general ascending movement of the air above the station; the air expands, but as soon as the column of air situated above the heated region reaches a greater height than that which covers the neighboring regions, the air spreads out at the sides; the quantity of air above the station diminishes, therefore, and the barometer falls. Toward the end of the day, when the temperature begins to fall rapidly in the lower layers, the ascending current loses its activity, ceases, and is finally replaced during the night by an inverse movement; the barometer then rises, rapidly at first while the temperature is falling rapidly, and then slowly till sunrise."

It will be noted that the explanation of the thermic or diurnal wave given by M. Angot coincides in great part with the first theory of the diurnal variation of the barometer proposed by Raymond, and perfected by Kreil and Renou, and which was unsatisfactory when it was applied to the total diurnal variation of the pressure.

We may conclude, therefore, that although the analysis of the curves which represent the different meteorological elements of each region is a long and tedious one, it can, nevertheless, be of the greatest utility, both for the simultaneous study of various phenomena, the mutual relations of which we wish to investigate, as well as for the deeper study of the causes which may intervene in each of them.

---

[1] We do not know whether M. Angot had any notice of the investigations of Doctor Margules, because neither here nor in the work which he published in "Annales du Bureau Central de France," does he make mention of them, notwithstanding their prime importance in the explanation of this wave. Doctor Hann, in publications posterior to those of Angot, laments the fact that the work of Doctor Margules was so little known, and that it had not even called the attention of the "Meteorologische Zeitschrift."

diminishes slowly up to the Tropics and afterwards very rapidly so that in high latitudes it is very small. It is probable that this semidiurnal wave is caused by the action of solar heat on the whole mass of the atmosphere, but up to the present time the manner in which this is effected has not been explained satisfactorily.

While the semidiurnal wave is the same for all regions situated in the same latitude, the diurnal wave has a very variable amplitude, which depends on the topographical conditions of the region, and which may be very different even in neighboring stations. In general, it is much weaker in coast stations than in continental stations, and its amplitude is in direct ratio to the amplitude of the diurnal variation of the temperature. The hours of the maximum and minimum vary greatly according to the countries and the seasons of the year; the maximum takes place earlier in summer than in winter; its mean epoch is about 8h; the minimum, on the contrary, whose mean epoch is about 16h, takes place earlier in winter than in summer. The period of falling, therefore, lasts, on an average only seven hours, while the period of rising extends to seventeen hours; the rise is not uniform during this time for it is rapid immediately after the minimum, is slow during the night, and then increases rapidly again between sunrise and the maximum.

While the theory of the semidiurnal wave has not been explained as yet, the diurnal wave, on the contrary, is fully explained by the local effect of the daily variation of the temperature. During the night, the lower layers of the atmosphere contract as they are cooled and, in order to fill the space thus produced by the contraction, air from all sides, especially from above, flows in. After sunrise the lower layers are warmed rapidly and tend to expand; but the heating is produced first in the layers in contact with the surface of the earth, so that the layers of air between the superficies and the higher layers which have not been heated as yet, do not at first increase their volume appreciably; that as happens when the air in a closed chamber is warmed, the rise of temperature is manifested principally by an increase of pressure in the same way the first effect of the diurnal heating is an increase of pressure in the layers which are in contact with the surface of the ground, and the barometer begins to rise.

"A little later, between 7 and 11 o'clock in the morning, according to the countries and season of the year, the heating of the lower layers is sufficient to determine a general ascending movement of the air above the station; the air expands, but as soon as the column of air situated above the heated region reaches a greater height than that which covers the neighboring regions, the air extends out at the sides; the quantity of air above the station diminishes, therefore, and the barometer falls. Toward the end of the day, when the temperature begins to fall rapidly in the lower layers, the ascending current loses its activity, ceases, and is finally replaced during the night by an inverse movement; the barometer then rises, rapidly at first while the temperature is falling rapidly, and then slowly till sunrise."

It will be noted that the explanation of the thermic or diurnal wave given by M. Angot coincides in great part with the first theory of the diurnal variation of the barometer proposed by Raymond, and perfected by Kreil and Remon, and which was unsatisfactory when it was applied to the total diurnal variation of the pressure.

We may conclude, therefore, that although the analysis of the curves which represent the different meteorological elements of each region is a long and tedious one, it can nevertheless be of the greatest utility both for the simultaneous study of various phenomena, the mutual relations of which we wish to investigate, as well as for the deeper study of the causes which may intervene in each of them.

We do not know whether M. Angot had any notice of the investigations of Doctor Margules, because neither here [illegible] the work which he published in "Annales du Bureau Central de France," does he make mention of them, notwithstanding their prime importance in the explanation of this wave. Doctor Hann, in publications later than those of Angot, laments the fact that the work of Doctor Margules was so little known, and that it had not been called the attention of the "Meteorologische Zeitschrift".

DEDUCTION OF BESSEL'S EQUATIONS FOR THE DETERMINATION OF THE COEFFICIENTS OF FORMULA (I).

Suppose that there are any number n of observations.

Let a_0, a_1, a_2, etc., represent the observations at 0, 1, 2, etc., hours.

We saw on page 7 that these observations are represented by the following equations:[1]

$$a_0=p+p_1+p_2+p_3+\text{--------}$$
$$a_1=p+p_1\cos x+q_1\sin x+p_2\cos 2x+q_2\sin 2x+p_3\cos 3x+q_3\sin 3x+\text{--------}$$
$$a_2=p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+p_2\cos 4x+q_2\sin 4x+p_3\cos 6x+q_3\sin 6x+\text{--------}$$
$$\text{---}$$
$$a_{n-1}=p+p_1\cos(n-1)x+q_1\sin(n-1)x+p_2\cos 2(n-1)x+q_2\sin 2(n-1)x$$
$$+p_3\cos 3(n-1)x+q_3\sin 3(n-1)x+\text{------}$$

If the number of coefficients which we propose to determine be the same as the number of observations, we would have a system of as many equations as unknowns, and we could resolve it easily by the ordinary algebraic methods. But ordinarily the number of observations greatly exceeds the number of the coefficients we require; thus, for example, in the analysis of the barometric curve, we have twenty-four observations and we employ only eight of these coefficients.

In this case the system is *more than determined;* and in the impossibility of finding the values p and q, which substituted in the equations, reproduce exactly the observations, we must content ourselves with estimating which are the most probable values of p and q, which give for the second members values compatible with the observations.

In the theory of least squares it is proved that the most probable values are those *which make the sum of the squares of the residual errors a minimum.* The residual error is the departure from the observed value of the value obtained in substituting in the equations the most probable values of the unknowns.

According to this definition, representing the residual errors by the symbols v_0, v_1, v_2, etc., and the most probable values of the coefficients by p_0, p_1, p_2, etc., we may write:

$$v_0=-a_0+p+p_1+p_2+p_3+\text{--------}$$
$$v_1=-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+p_2\cos 2x+q_2\sin 2x+p_3\cos 3x+q_3\sin 3x+\text{--------}$$
$$v_2=-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+p_2\cos 4x+q_2\sin 4x+p_3\cos 6x+q_3\sin 6x+\text{--------}$$
$$v_3=-a_3+p+p_1\cos 3x+q_1\sin 3x+p_2\cos 6x+q_2\sin 6x+p_3\cos 9x+q_3\sin 9x+\text{--------}$$
$$\text{---}$$
$$v_{n-1}=-a_{n-1}+p+p_1\cos(n-1)x+q_1\sin(n-1)x+p_2\cos 2(n-1)x+q_2\sin 2(n-1)x$$
$$+p_3\cos 3(n-1)x+q_3\sin 3(n-1)x+\text{--------}$$

The condition which makes the values of p and q most probable is that

$$v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2+\text{--------}=\text{minimum.}$$

and writing instead of v_0^2, v_1^2, etc., their values we have

$$(-a_0+p+p_1+p_2+\text{--------})^2+(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\text{--------})^2$$
$$+(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\text{--------})^2=\text{a minimum.}$$

We know from the differential calculus that when a function is a minimum, its derivatives with respect to each of the variables are zero. Hence, deriving the former ex-

[1] The quantity p which appears in these equations represents the constant M which we saw completed Bessel's formula; it is also to be noted that the equations on page 7 are given here according to formula (I).

pression with respect to p, p_1, q_1, etc., and representing these derivatives by P, P_1, Q_1, etc., we obtain the following system—

$$
\begin{aligned}
P&=2(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots)+2(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\ldots)\\
&\qquad +2(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\ldots)+\ldots=0\\
P_1&=2(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots)+2\cos x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\ldots)\\
&\qquad +2\cos 2x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\ldots)+\ldots=0\\
Q_1&=2\sin x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\ldots)+2\sin 2x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\ldots)+\ldots=0\\
P_2&=2(-a_0+p+p_1+p_2\ldots)+2\cos 2x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\ldots)\\
&\qquad +2\cos 4x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\ldots)+\ldots=0\\
Q_2&=2\sin 2x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\sin x+\ldots)+2\sin 4x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\sin 2x+\ldots)+\ldots=0
\end{aligned}
$$

This is the system which must be solved in order to find the values of p and q, which will be the most probable; because in this hypothesis the preceding equations have been obtained.

After dividing by 2 we can write it in the following form:

$$
\tfrac{1}{2}P=\begin{array}{l}-a_0\\-a_1\\-a_2\\-a_3\\\vdots\\-a_{n-1}\end{array}
+np+p_1\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\\+\cos 2x\\+\cos 3x\\+\cos 4x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\end{array}\right.
+q_1\left|\begin{array}{l}\sin x\\+\sin 2x\\+\sin 3x\\+\sin 4x\\\vdots\\+\sin(n-1)x\end{array}\right.
+p_2\left|\begin{array}{l}1\\+\cos 2x\\+\cos 4x\\+\cos 6x\\+\cos 8x\\\vdots\\+\cos 2(n-1)x\end{array}\right.
+q_2\left|\begin{array}{l}\sin 2x\\+\sin 4x\\+\sin 6x\\+\sin 8x\\\vdots\\+\sin 2(n-1)x\end{array}\right.
+\ldots=0
$$

$$
\tfrac{1}{2}P_1=\begin{array}{l}-a_0\\-a_1\cos x\\-a_2\cos 2x\\-a_3\cos 3x\\\vdots\\-a_{n-1}\cos(n-1)x\end{array}
+p\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\\+\cos 2x\\+\cos 3x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\end{array}\right.
+p_1\left|\begin{array}{l}1\\+\cos^2 x\\+\cos^2 2x\\+\cos^2 3x\\\vdots\\+\cos^2(n-1)x\end{array}\right.
+q_1\left|\begin{array}{l}\cos x\sin x\\+\cos 2x\sin 2x\\+\cos 3x\sin 3x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\sin(n-1)x\end{array}\right.
$$

$$
+p_2\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\cos 2x\\+\cos 2x\cos 4x\\+\cos 3x\cos 6x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\cos 2(n-1)x\end{array}\right.
+q_2\left|\begin{array}{l}\cos x\sin 2x\\+\cos 2x\sin 4x\\+\cos 3x\sin 6x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\sin 2(n-1)x\end{array}\right.
+\ldots=0
$$

$$
\tfrac{1}{2}Q_1=\begin{array}{l}-a_1\sin x\\-a_2\sin 2x\\-a_3\sin 3x\\\vdots\\-a_{n-1}\sin(n-1)x\end{array}
+p\left|\begin{array}{l}\sin x\\+\sin 2x\\+\sin 3x\\\vdots\\+\sin(n-1)x\end{array}\right.
+p_1\left|\begin{array}{l}\sin x\cos x\\+\sin 2x\cos 2x\\+\sin 3x\cos 3x\\\vdots\\+\sin(n-1)x\cos(n-1)x\end{array}\right.
+q_1\left|\begin{array}{l}\sin^2 x\\+\sin^2 2x\\+\sin^2 3x\\\vdots\\+\sin^2(n-1)x\end{array}\right.
$$

$$
+p_2\left|\begin{array}{l}\sin x\cos 2x\\+\sin 2x\cos 4x\\+\sin 3x\cos 6x\\\vdots\\+\sin(n-1)\cos 2(n-1)x\end{array}\right.
+q_2\left|\begin{array}{l}\sin x\sin 2x\\+\sin 2x\sin 4x\\+\sin 3x\sin 6x\\\vdots\\+\sin(n-1)x\sin 2(n-1)x\end{array}\right.
$$

This system, according to the notation explained on page 11, may be written in the following manner:

$$\left.\begin{array}{l}
-\Sigma a_m+np+p_1\,\Sigma\cos mx+q_1\,\Sigma\sin mx+p_2\,\Sigma\cos 2mx+q_2\,\Sigma\sin 2mx+\text{------}=0\\
-\Sigma a_m\cos mx+p\,\Sigma\cos mx+p_1\,\Sigma\cos^2 mx+q_1\,\Sigma\cos mx\sin mx+p_2\,\Sigma\cos mx\cos 2mx+q_2\,\Sigma\cos mx\sin 2mx+=0\\
-\Sigma a_m\sin mx+p\,\Sigma\sin mx+p_1\,\Sigma\sin mx\cos mx+q_1\,\Sigma\sin^2 mx+p_2\,\Sigma\sin mx\cos 2mx+q_2\,\Sigma\sin mx\sin 2mx+=0\\
-\Sigma a_m\cos 2mx+p\,\Sigma\cos 2mx+p_1\,\Sigma\cos 2mx\cos mx+q_1\,\Sigma\cos 2mx\sin mx+p_2\,\Sigma\cos^2 2mx\\
\qquad\qquad+q_2\,\Sigma\cos 2mx\sin 2mx+=0\\
-\Sigma a_m\sin 2mx+p\,\Sigma\sin 2mx+p_1\,\Sigma\sin 2mx\cos mx+q_1\,\Sigma\sin 2mx\sin mx+p_2\,\Sigma\sin 2mx\cos 2mx\\
\qquad\qquad+q_2\,\Sigma\sin^2 2mx+=0\\
\text{------------------------}
\end{array}\right\}A$$

When nx (the product of the number of observations multiplied by the number of degrees of the parts into which the different circles of reference are divided) is a multiple of 2π, the preceeding system is reduced to the following:[1]

$$\left.\begin{array}{r}
-\Sigma a_m+np=0\\
-\Sigma a_m\cos mx+p_1\,\Sigma\cos^2 mx=0\\
-\Sigma a_m\sin mx+q_1\,\Sigma\sin^2 mx=0\\
-\Sigma a_m\cos 2mx+p_2\,\Sigma\cos^2 2mx=0\\
-\Sigma a_m\sin 2mx+q_2\,\Sigma\sin^2 2mx=0
\end{array}\right\}(B)$$

But as will be proved later

$$\Sigma\cos^2 mx=\frac{n}{2}$$

$$\Sigma\sin^2 mx=\frac{n}{2}$$

$$\Sigma\cos^2 2mx=\frac{n}{2}$$

$$\Sigma\sin^2 2mx=\frac{n}{2}$$

then substituting these values in system (B) we obtain finally

$$\left.\begin{array}{r}
-\Sigma a_m+np=0\\
-\Sigma a_m\cos mx+\frac{n}{2}p_1=0\\
-\Sigma a_m\sin mx+\frac{n}{2}q_1=0\\
-\Sigma a_m\cos 2mx+\frac{n}{2}p_2=0\\
-\Sigma a_m\sin 2mx+\frac{n}{2}q_2=0
\end{array}\right\}\therefore\begin{array}{l}
p=\frac{\Sigma a_m}{n}\\
\frac{n}{2}p_1=\Sigma a_m\cos mx\\
\frac{n}{2}q_1=\Sigma a_m\sin mx\\
\frac{n}{2}p_2=\Sigma a_m\cos 2mx\\
\frac{n}{2}q_2=\Sigma a_m\sin 2mx
\end{array}$$

These are in their general form Bessel's equations which we required; in our particular case of twenty-four observations, $\frac{n}{2}=12$, which reduces these equations to those on page 11. It is also proved that the constant p or M, which completes Bessel's formula, is the arithmetical mean of the observations; thus we have in our case:

$$p=\frac{a_0+a_1+a_2+\text{------}+a_{23}}{24}$$

It only remains to prove the change from (A) to (B) and the equations (C).

For the first it is sufficient to prove that when nx is a multiple of 2π

$$\Sigma\sin mx=0,\ \Sigma\cos mx=0,\ \Sigma\sin 2mx=0,\ \Sigma\cos 2mx=0,\ \text{etc.}$$

[1] This will be proved later on.

Let us take the well known trigonometrical formula:

$$2 \sin z \sin y = \cos(z-y) - \cos(z+y) \therefore \sin z = \frac{\cos(z-y) - \cos(z+y)}{2 \sin y} \quad (1)$$

By a series of applications of Formula (1) in which we write x, $2x$, $3x$..................., $(n-1)x$ instead of z and $\frac{x}{2}$ instead of y, we have:

$$\sin x = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin 2x = \frac{\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin 3x = \frac{\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin(n-2)x = \frac{\cos\frac{(2n-5)x}{2} - \cos\frac{(2n-3)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin(n-1)x = \frac{\cos\frac{(2n-3)x}{2} - \cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

and taking the sum we obtain:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots\ldots + \sin(n-1)x = \Sigma \sin mx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos nx \cos\frac{x}{2} - \sin nx \sin\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

if nx is a multiple of 2π, we know that

$$\cos nx = 1; \sin nx = 0$$

and hence

$$\Sigma \sin mx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}} = 0$$

In like manner it is proved that $\Sigma \sin 2mx = 0$, $\Sigma \sin 3mx = 0$, etc., so for this last we will write in Formula (1) $3x$, $6x$, $9x$, ..., $(n-1)\,3x$ instead of z, and 2 instead of y, which will give:

$$\Sigma \sin 3mx = \frac{\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{(6n-3)x}{2}}{2 \sin\frac{3x}{2}} = \frac{\cos\frac{3x}{2} - \cos 3nx \cos\frac{3x}{2} - \sin 3nx \sin\frac{3x}{2}}{2 \sin\frac{3x}{2}}$$

and as $3nx$ is a multiple of 2π, it follows that $\Sigma \sin 3mx = 0$.

To prove that $\Sigma \cos mx = 0$, $\Sigma \cos 2mx = 0$, we make use of the trigonometrical formula

$$2 \cos z \sin y = \sin(z+y) - \sin(z-y) \therefore \cos z = \frac{\sin(z+y) - \sin(z-y)}{2 \sin y} \quad (2)$$

and writing $0, x, 2x, \ldots\ldots\ldots, (n-1)x$ instead of z, and $\frac{x}{2}$ instead of y, we have

$$\cos 0 = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos 2x = \frac{\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos 3x = \frac{\sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

....

$$\cos(n-2)x = \frac{\sin\frac{(2n-3)x}{2} - \sin\frac{(2n-5)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos(n-1)x = \frac{\sin\frac{(2n-1)x}{2} - \sin\frac{(2n-3)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

Taking the sum we obtain:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots\ldots\ldots + \cos(n-1)x = \Sigma \cos mx = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin nx \cos\frac{x}{2} - \cos nx \sin\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

and remembering that $nx = \dot{\overline{2\pi}}$, it follows that:

$$\Sigma \cos mx = \frac{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2}} = 0$$

This having been proved, it is readily seen that the other terms of system (A) of the form

$\Sigma \cos mx \sin mx$; $\Sigma \sin mx \cos 2mx$; $\Sigma \sin mx \sin 2mx$; $\Sigma \cos mx \sin 2mx$; $\Sigma \cos mx \cos 2mx$

are also reduced to zero; because as the product of the sine and cosine of a same arc is equal to the half of the sine of the double arc, we obtain:

$$\Sigma \cos mx \sin mx = \tfrac{1}{2} \Sigma \sin 2mx = 0$$

the same can be proved for the other four expressions by making use of the well-known trigonometrical formulas

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y &= \tfrac{1}{2} \sin(x+y) + \tfrac{1}{2} \sin(x-y) \\
\cos x \sin y &= \tfrac{1}{2} \sin(x+y) - \tfrac{1}{2} \sin(x-y) \\
\cos x \cos y &= \tfrac{1}{2} \cos(x+y) + \tfrac{1}{2} \cos(x-y) \\
\sin x \sin y &= \tfrac{1}{2} \cos(x-y) - \tfrac{1}{2} \cos(x+y)
\end{aligned}$$

for writing mx and $2mx$ for x and y, we have:

$$\begin{aligned}
\Sigma \sin mx \cos 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \sin 3mx - \tfrac{1}{2}\Sigma \sin mx \\
\Sigma \cos mx \sin 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \sin 3mx + \tfrac{1}{2}\Sigma \sin mx \\
\Sigma \cos mx \cos 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos 3mx + \tfrac{1}{2}\Sigma \cos mx \\
\Sigma \sin mx \sin 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos mx - \tfrac{1}{2}\Sigma \cos 3mx
\end{aligned}$$

and as was proved before, the second members are zero.

We now proceed to prove the equations (C); a simple trigonometrical expansion gives us that:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

and according to this we have:

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 0 &= 1 + \cos 0 \\
2 \cos^2 x &= 1 + \cos 2x \\
2 \cos^2 2x &= 1 + \cos 4x \\
2 \cos^2 3x &= 1 + \cos 6x \\
&\cdots\cdots\cdots \\
2 \cos^2 (n-1) x &= 1 + \cos 2(n-1) x
\end{aligned}$$

taking the sum we get

$$2 \Sigma \cos^2 mx = n + (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cdots\cdots + \cos 2(n-1)x = n + \Sigma \cos 2mx$$

but, as we proved before $\Sigma \cos 2mx = 0$, hence

$$\Sigma \cos^2 mx = \frac{n}{2}$$

In an analogous manner this same value can be proved for any term of the form $\Sigma \cos^2 mkx$.

To prove that $\Sigma \sin^2 mx = \dfrac{n}{2}$ we make use of the known equation

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

and writing

$$\begin{aligned}
\sin^2 0 &= 1 - \cos^2 0 \\
\sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\
\sin^2 2x &= 1 - \cos^2 2x \\
\sin^2 3x &= 1 - \cos^2 3x \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\sin^2 (n-1) x &= 1 - \cos^2 (n-1) x
\end{aligned}$$

and adding, we have

$$\Sigma \sin^2 mx = n - \Sigma \cos^2 mx$$

but we have just proved that $\Sigma \cos^2 mx = \frac{n}{2}$, therefore

$$\Sigma \sin^2 mx = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

We do not think it necessary to delay any longer over this work and give the whole of Bessel's method; those who may be interested in it may consult Bessel's own explànation, translated into English by Mr. Robert H. Scott, and published as an appendix to the Quarterly Weather Report of the Meteorological Office, London, 1870.

TABLE I.—*Mean hourly values of atmospheric pressure at Manila for each month (1890–1909).*

Hour.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
0	61.382	61.704	60.924	59.938	58.872	58.520	57.880	57.834	57.934	58.824	59.684	60.880
1	61.092	61.404	60.556	59.624	58.601	58.193	57.468	57.459	57.549	58.408	59.330	60.590
2	60.722	61.072	60.214	59.228	58.187	57.789	57.128	57.102	57.190	58.080	58.970	60.162
3	60.464	60.854	59.982	59.029	57.982	57.620	56.936	56.868	56.944	57.883	58.686	59.930
4	60.516	60.833	59.989	59.071	57.991	57.556	56.870	56.820	56.885	57.842	58.726	59.967
5	60.718	61.047	60.204	59.346	58.168	57.649	56.944	56.926	57.046	58.030	58.953	60.176
6	61.069	61.470	60.661	59.704	58.486	57.950	57.222	57.191	57.306	58.476	59.388	60.512
7	61.546	61.943	61.172	60.193	58.885	58.258	57.546	57.518	57.705	58.915	59.836	60.966
8	62.028	62.342	61.564	60.584	59.166	58.446	57.762	57.830	58.117	59.248	60.218	61.467
9	62.264	62.630	61.762	60.693	59.274	58.539	57.869	57.980	58.246	59.452	60.423	61.642
10	62.128	62.568	61.630	60.559	59.142	58.456	57.819	57.918	58.182	59.366	60.274	61.480
11	61.701	62.120	61.250	60.143	58.816	58.188	57 622	57.734	57.930	58.928	59.877	61.084
12	61.057	61.494	60.620	59.562	58.333	57.824	57.283	57.354	57.428	58.349	59.258	60.485
13	60.282	60.712	59.827	58.732	57.686	57.344	56.846	56.828	56.798	57.732	58.572	59.735
14	59.656	60.058	59.134	58.033	57.118	56.910	56.444	56.420	56.378	57.204	58.071	59.198
15	59.360	59.650	58.672	57.615	56.771	56.576	56.169	56.163	56.087	56.944	57.879	58.952
16	59.462	59.666	58.620	57.490	56.656	56.496	56.066	56.087	56.128	57.078	57.993	59.082
17	59.814	59.954	58.867	57.700	56.890	56.706	56.232	56.254	56.368	57.391	58.344	59.480
18	60.228	60.352	59.266	58.204	57.402	57.130	56.598	56.640	56.788	57.732	58.708	59.882
19	60.698	60.798	59.749	58.762	57.917	57.619	57.062	57.087	57.240	58.196	59.218	60.369
20	61.158	61.274	60.261	59.266	58.397	58.078	57.488	57.528	57.688	58.728	59.698	60.811
21	61.461	61.654	60.742	59.753	58.835	58.474	57.861	57.924	58.101	59.071	59.964	61.094
22	61.544	61.839	61.012	60.124	59.144	58.755	58.158	58.218	58.294	59.208	60.054	61.156
23	61.496	61.852	61.078	60.170	59.157	58.811	58.172	58.177	58.180	59.130	59.958	61.059
24	61.365	61.717	60.898	59.902	58.852	58.498	57.868	57.852	57.921	58.867	59.736	60.900

TABLE II.—*Same as Table I corrected for noncyclic variation.*

Hour.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
0	61.374	61.710	60.911	59.920	58.862	58.509	57.874	57.843	57.928	58.846	59.710	60.890
1	61.084	61.410	60.544	59.608	58.592	58.183	57.463	57.467	57.543	58.428	59.354	60.599
2	60.715	61.077	60.203	59.213	58.179	57.780	57.123	57.110	57.185	58.098	58.992	60.170
3	60.458	60.859	59.972	59.015	57.974	57.612	56.932	56.875	56.939	57.899	58.706	59.938
4	60.510	60.837	59.980	59.059	57.984	57.549	56.866	56.826	56.881	57.856	58.743	59.974
5	60.713	61.051	60.196	59.336	58.162	57.643	56.940	56.931	57.042	58.043	58.968	60.182
6	61.065	61.473	60.655	59.695	58.481	57.944	57.219	57.186	57.303	58.487	59.401	60.517
7	61.542	61.946	61.167	60.186	58.881	58.253	57.544	57.522	57.702	58.924	59.847	60.970
8	62.025	62.344	61.561	60.578	59.164	58.443	57.760	57.833	58.115	59.255	60.227	61.469
9	62.262	62.632	61.759	60.688	59.272	58.536	57.867	57.982	58.244	59.457	60.430	61.644
10	62.127	62.569	61.628	60.556	59.140	58.454	57.818	57.919	58.181	59.370	60.278	61.482
11	61.700	62.120	61.249	60.141	58.815	58.187	57.621	57.735	57.929	58.930	59.879	61.085
12	61.057	61.494	60.620	59.562	58.333	57.824	57.283	57.354	57.428	58.349	59.258	60.485
13	60.283	60.712	59.828	58.734	57.687	57.345	56.847	56.827	56.799	57.730	58.570	59.734
14	59.657	60.057	59.136	58.036	57.120	56.912	56.445	56.419	56.379	57.200	58.067	59.196
15	59.362	59.648	58.675	57.620	56.774	56.579	56.171	56.161	56.089	56.939	57.872	58.950
16	59.465	59.664	58.623	57.496	56.658	56.499	56.068	56.084	56.130	57.071	57.984	59.080
17	59.818	59.951	58.872	57.707	56.894	56.711	56.234	56.250	56.371	57.382	58.333	59.476
18	60.232	60.349	59.272	58.213	57.407	57.136	56.601	56.636	56.791	57.721	58.695	59.877
19	60.703	60.794	59.757	58.772	57.923	57.625	57.066	57.082	57.244	58.183	59.203	60.363
20	61.164	61.270	60.270	59.278	58.404	58.085	57.492	57.522	57.692	58.714	59.681	60.804
21	61.467	61.649	60.752	59.767	58.843	58.482	57.866	57.917	58.106	59.055	59.944	61.086
22	61.551	61.834	61.023	60.139	59.152	58.764	58.163	58.210	58.299	59.190	60.032	61.148
23	61.504	61.846	61.090	60.186	59.166	58.821	58.177	58.169	58.186	59.110	59.934	61.050
24	61.374	61.710	60.911	59.920	58.862	58.509	57.874	57.843	57.928	58.846	59.710	60.890
Mean	60.910	61.221	60.323	59.313	58.244	57.828	57.227	57.244	57.354	58.343	59.254	60.424

TABLE III.—*Diurnal variation of atmospheric pressure at Manila (1890–1909), corrected for noncyclic variation (unit, 0.01).*

Hour.	January.	February.	March.	April.	May.	June.	July.	August.	September.	October.	November.	December.
0	+ 46	+ 49	+ 59	+ 61	+ 62	+ 68	+ 65	+ 60	+ 57	+ 50	+ 46	+ 47
1	+ 17	+ 19	− 22	+ 30	+ 35	+ 36	+ 24	+ 22	+ 19	+ 8	+ 10	+ 18
2	− 20	− 14	− 12	− 10	− 6	− 5	− 10	− 13	− 17	− 25	− 26	− 25
3	− 45	− 36	− 35	− 30	− 27	− 22	− 30	− 37	− 42	− 44	− 55	− 49
4	− 40	− 38	− 34	− 25	− 26	− 28	− 36	− 42	− 47	− 49	− 51	− 45
5	− 20	− 17	− 13	+ 2	− 8	− 18	− 29	− 31	− 31	− 30	− 29	− 24
6	+ 16	+ 25	+ 33	+ 38	+ 24	+ 12	− 1	− 6	− 5	+ 14	+ 15	+ 9
7	+ 63	+ 72	+ 84	+ 87	+ 64	+ 42	+ 32	+ 28	+ 35	+ 58	+ 59	+ 55
8	+112	+112	+124	+126	+ 92	+ 62	+ 53	+ 59	+ 76	+ 91	+ 97	+104
9	+135	+141	+144	+138	+103	+ 71	+ 64	+ 74	+ 89	+111	+118	+122
10	+122	+135	+130	+124	+ 90	+ 63	+ 59	+ 68	+ 83	+103	+102	+106
11	+ 79	+ 90	+ 93	+ 83	+ 57	+ 36	+ 39	+ 49	+ 58	+ 59	+ 62	+ 66
12	+ 15	+ 27	+ 30	+ 25	+ 9	0	+ 6	+ 11	+ 7	+ 5	0	+ 6
13	− 63	− 51	− 50	− 58	− 56	− 48	− 38	− 42	− 56	− 61	− 68	− 69
14	−125	−116	−119	−128	−112	− 92	− 78	− 82	− 98	−114	−119	−123
15	−155	−157	−165	−169	−147	−125	−106	−108	−126	−140	−138	−147
16	−144	−156	−170	−182	−159	−133	−116	−116	−122	−127	−127	−134
17	−109	−127	−145	−161	−135	−112	− 99	− 99	− 98	− 96	− 92	− 95
18	− 68	− 87	−105	−110	− 84	− 69	− 63	− 61	− 56	− 62	− 56	− 55
19	− 21	− 43	− 57	− 54	− 32	− 20	− 16	− 16	− 11	− 16	− 5	− 6
20	+ 25	+ 5	− 5	− 4	+ 16	+ 26	+ 26	+ 28	+ 34	+ 37	+ 43	+ 38
21	+ 56	+ 43	+ 43	+ 45	+ 60	+ 65	+ 64	+ 67	+ 75	+ 71	+ 69	+ 66
22	+ 64	+ 61	+ 70	+ 83	+ 91	+ 94	+ 94	+ 97	+ 94	+ 85	+ 78	+ 72
23	+ 59	+ 62	+ 77	+ 87	+ 92	+ 99	+ 95	+ 92	+ 83	+ 77	+ 68	+ 63

TABLE IV.—*Constants of the Harmonic Formula (I) computed from Table III.*

Month.	p_1.	q_1.	p_2.	q_2.	p_3.	q_3.	p_4.	q_4.
January	+0.1341	+0.5476	+0.2596	−0.9431	+0.0258	+0.1340	+0.0196	−0.0166
February	+ .0891	+ .6596	+ .3438	− .9215	+ .0233	+ .1074	+ .0258	− .0187
March	+ .1208	+ .7495	+ .3949	− .9530	+ .0395	+ .0512	+ .0362	− .0151
April	+ .2022	+ .7948	+ .3888	− .9661	+ .0216	+ .0162	+ .0383	− .0158
May	+ .2980	+ .5711	+ .3396	− .8508	+ .0073	− .0048	+ .0313	− .0007
June	+ .3522	+ .3860	+ .3259	− .7226	+ .0098	− .0361	+ .0300	0
July	+ .2895	+ .2829	+ .3371	− .6816	+ .0168	− .0453	+ .0192	− .0101
August	+ .2579	+ .2783	+ .3458	− .7282	+ .0162	− .0201	+ .0083	− .0245
September	+ .2475	+ .3152	+ .3051	− .8257	+ .0194	+ .0364	+ .0041	− .0274
October	+ .1994	+ .4065	+ .2465	− .9080	+ .0404	+ .0535	+ .0066	− .0317
November	+ .1841	+ .3970	+ .2030	− .9236	+ .0500	+ .0836	+ .0125	− .0144
December	+ .1893	+ .4364	+ .2169	− .9307	+ .0338	+ .1225	+ .0188	− .0122

TABLE V.—*Amplitudes and phase angles of Fourier "waves" computed from Table IV, using L. M. T.*

Month.	u_1.	u_2.	u_3.	u_4.	U_1.	U_2.	U_3.	U_4.
					° ′	° ′	° ′	° ′
January	0.5638	0.9782	0.1350	0.0257	13 46	164 37	11 1	130 17
February	.6607	.9836	.1100	.0319	3 20	159 32	12 14	125 58
March	.7592	1.0315	.0647	.0392	9 9	157 30	37 40	112 34
April	.8202	1.0414	.0271	.0415	14 17	158 5	53 8	112 25
May	.6442	.9161	.0088	.0313	27 33	158 14	123 42	91 22
June	.5231	.7927	.0374	.0300	42 20	155 44	164 49	90 0
July	.4047	.7604	.0483	.0217	45 39	153 41	159 39	117 51
August	.3794	.8062	.0259	.0259	42 49	154 36	141 17	161 15
September	.4007	.8802	.0412	.0278	38 9	159 43	28 6	171 26
October	.4528	.9409	.0670	.0324	26 8	164 49	37 7	168 12
November	.4376	.9457	.0974	.0600	24 53	167 36	30 53	167 59
December	.4757	.9557	.1271	.0707	23 27	166 53	15 26	164 37

Table VI.

JANUARY.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.134	+0.259	+0.026	+0.020	+0.439	−0.02
1	+ .271	− .246	+ .112	− .004	+ .133	− .04
2	+ .390	− .687	+ .133	− .024	− .188	+ .01
3	+ .482	− .943	+ .075	− .020	− .406	+ .04
4	+ .541	− .947	− .026	+ .004	− .428	− .03
5	+ .564	− .696	− .112	+ .024	− .220	− .02
6	+ .548	− .259	− .133	+ .020	+ .176	+ .02
7	+ .495	+ .246	− .075		+ .662	+ .03
8	+ .407	+ .687	+ .026		+1.096	− .02
9	+ .293	+ .943			+1.328	− .02
10	+ .158	+ .947			+1.242	+ .02
11	+ .012	+ .696			+ .807	+ .02
12	− .134	+ .259			+ .119	− .03
13	− .271	− .246			− .633	0
14	− .390	− .687			−1.234	+ .02
15	− .482	− .943			−1.520	+ .03
16	− .541	− .947			−1.458	− .02
17	− .564	− .696			−1.124	− .03
18	− .548	− .259			− .654	+ .03
19	− .495	+ .246			− .178	+ .03
20	− .407	+ .687			+ .230	− .02
21	− .293	+ .943			+ .518	− .04
22	− .158	+ .947			+ .660	+ .02
23	− .012	+ .696			+ .633	+ .04

FEBRUARY.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.038	+0.344	+0.023	+0.026	+0.431	−0.06
1	+ .208	− .163	+ .093	− .003	+ .135	− .05
2	+ .364	− .627	+ .107	− .029	− .185	− .04
3	+ .494	− .922	+ .060	− .026	− .394	− .03
4	+ .591	− .970	− .023		− .399	− .02
5	+ .647	− .759			− .176	− .01
6	+ .660	− .344			+ .235	− .01
7	+ .627				+ .727	+ .01
8	+ .553				+1.174	+ .05
9	+ .440				+1.429	+ .02
10	+ .297				+1.377	+ .03
11	+ .134				+ .982	+ .08
12	− .038				+ .309	+ .04
13					− .467	+ .04
14					−1.127	+ .03
15					−1.502	+ .07
16					−1.535	+ .02
17					−1.284	− .01
18					− .871	0
19					− .407	+ .02
20					+ .022	− .03
21					+ .363	− .07
22					+ .569	− .04
23					+ .594	− .03

MARCH.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.121	+0.395	+0.040	+0.036	+0.592	0
1	+ .310	− .135	+ .064	+ .005	+ .234	+0.01
2	+ .479	− .628	+ .051	− .031	− .129	− .01
3	+ .616	− .954	+ .008	− .036	− .366	− .02
4	+ .710	−1.023	− .040		− .358	− .02
5	+ .755	− .818			− .096	+ .03
6	+ .749	− .395			+ .339	+ .01
7	+ .692				+ .824	− .02
8	+ .589				+1.226	− .01
9	+ .445				+1.427	− .01
10	+ .270				+1.339	+ .04
11	+ .077				+ .934	0
12	− .121				+ .270	− .03
13					− .504	0
14					−1.189	0
15					−1.614	+ .04
16					−1.698	0
17					−1.478	− .03
18					−1.057	− .01
19					− .544	+ .03
20					− .032	+ .02
21					+ .409	− .02
22					+ .697	0
23					+ .764	.01

APRIL.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.203	+0.388	+0.022	+0.039	+0.652	+. 04
1	+ .401	− .147	+ .027	+ .006	+ .287	− .01
2	+ .572	− .642	+ :016	− .033	− .067	+ .03
3	+ .705	− .966	− .004	− .039	− .304	0
4	+ .790	−1.031	− .022		− .269	− .02
5	+ .820	− .819			+ .007	− .01
6	+ .795	− .388			+ .430	+ .03
7	+ .715				+ .872	0
8	+ .587				+1.218	− .04
9	+ .419				+1.373	− .01
10	+ .222				+1.263	+ .02
11	+ .011				+ .859	+ .03
12	− .203				+ .202	− .05
13					− .569	+ .01
14					−1.263	+ .02
15					−1.706	− .02
16					−1.805	+ .01
17					−1.579	+ .03
18					−1.128	− .03
19					− .566	− .03
20					0	+ .04
21					+ .481	+ .03
22					+ .787	− .04
23					+ .845	− .01

MAY.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.298	+0.340	+0.007	+0.031	+0.676	+0.06
1	+ .435	− .131	+ .002	+ .015	+ .321	− .03
2	+ .544	− .567	− .005	− .016	− .044	+ .02
3	+ .614	− .851	− .009	− .031	− .277	− .01
4	+ .643	− .907	− .007		− .286	− .03
5	+ .629	− .720			− .077	0
6	+ .571	− .340			+ .267	+ .03
7	+ .475				+ .630	− .01
8	+ .346				+ .904	− .02
9	+ .193				+1.015	− .01
10	+ .028				+ .915	+ .02
11	− .140				+ .587	+ .02
12	− .298				+ .066	− .02
13					− .553	+ .01
14					−1.122	0
15					−1.487	− .02
16					−1.558	+ .03
17					−1.331	+ .02
18					− .885	− .04
19					− .338	− .02
20					+ .198	+ .04
21					+ .625	+ .03
22					+ .869	− .04
23					+ .885	− .03

JUNE.

Hour.	Fourier "waves."				Resultant.	Departures from observed values.
	First.	Second.	Third.	Fourth.		
0	+0.352	+0.326	+0.010	+0.030	+0.718	+0.04
1	+ .440	− .079	− .018	+ .015	+ .358	0
2	+ .498	− .463	− .036	− .015	− .016	+ .03
3	+ .522	− .723	− .032	− .030	− .263	− .04
4	+ .511	− .789	− .010		− .303	− .02
5	+ .464	− .644			− .177	0
6	+ .386	− .326			+ .126	+ .01
7	+ .282				+ .408	− .01
8	+ .158				+ .616	0
9	+ .025				+ .700	− .01
10	− .112				+ .626	0
11	− .240				+ .387	+ .03
12	− .352				− .006	− .01
13					− .486	− .01
14					− .940	− .02
15					−1.243	+ .01
16					−1.305	+ .02
17					−1.111	+ .01
18					− .718	− .03
19					− .220	− .02
20					+ .280	+ .02
21					+ .686	+ .04
22					+ .922	− .02
23					+ .931	− .06

TABLE VI—Continued.

JULY.

Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.290	+0.337	+0.017	+0.019	+0.663	+0.01
1	+ .353	— .049	— .020	+ .001	+ .285	+ .05
2	+ .392	— .422	— .045	— .019	— .094	+ .01
3	+ .405	— .681	— .044	— .019	— .339	— .04
4	+ .390	— .758	— .017		— .386	— .03
5	+ .348	— .632			— .245	+ .04
6	+ .283	— .337			+ .010	+ .02
7	+ .198				+ .292	— .03
8	+ .100				+ .520	— .01
9	— .004				+ .638	0
10	— .109				+ .603	+ .01
11	— .207				+ .400	+ .01
12	— .290				+ .049	— .01
13					— .381	0
14					— .788	— .01
15					—1.061	0
16					—1.132	+ .03
17					— .981	+ .01
18					— .646	— .02
19					— .192	— .03
20					+ .286	+ .03
21					+ .686	+ .05
22					+ .911	— .03
23					+ .902	— .05

AUGUST.

Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.258	+0.346	+0.016	+0.008	+0.628	+0.03
1	+ .321	— .064	— .003	— .017	+ .237	+ .02
2	+ .362	— .458	— .020	— .026	— .142	— .01
3	+ .379	— .728	— .026	— .008	— .383	— .01
4	+ .370	— .804	— .016		— .467	— .05
5	+ .335	— .663			— .299	+ .01
6	+ .278	— .346			— .040	+ .02
7	+ .202				+ .275	0
8	+ .112				+ .560	— .03
9	+ .014				+ .731	— .01
10	— .084				+ .717	+ .04
11	— .177				+ .486	0
12	— .258				+ .080	— .03
13					— .399	+ .02
14					— .826	— .02
15					—1.089	— .01
16					—1.141	+ .02
17					— .975	+ .01
18					— .636	— .03
19					— .181	— .02
20					+ .304	+ .02
21					+ .709	+ .04
22					+ .925	— .04
23					+ .892	— .03

SEPTEMBER.

Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.248	+0.305	+0.019	+0.004	+0.576	+0.01
1	+ .321	— .149	+ .039	— .022	+ .189	0
2	+ .372	— .562	+ .036	— .026	— .180	— .01
3	+ .398	— .825	+ .012	— .004	— .419	0
4	+ .397	— .868	— .019		— .468	0
5	+ .369	— .677			— .321	— .01
6	+ .315	— .305			— .022	+ .03
7	+ .241				+ .356	+ .01
8	+ .149				+ .704	— .06
9	+ .048				+ .908	+ .02
10	— .057				+ .869	+ .04
11	— .158				+ .557	— .02
12	— .248				+ .042	— .03
13					— .531	+ .03
14					— .996	— .02
15					—1.239	+ .02
16					—1.224	0
17					— .981	0
18					— .580	— .02
19					— .102	+ .01
20					+ .368	+ .03
21					+ .734	— .02
22					+ .911	— .03
23					+ .849	+ .02

OCTOBER.

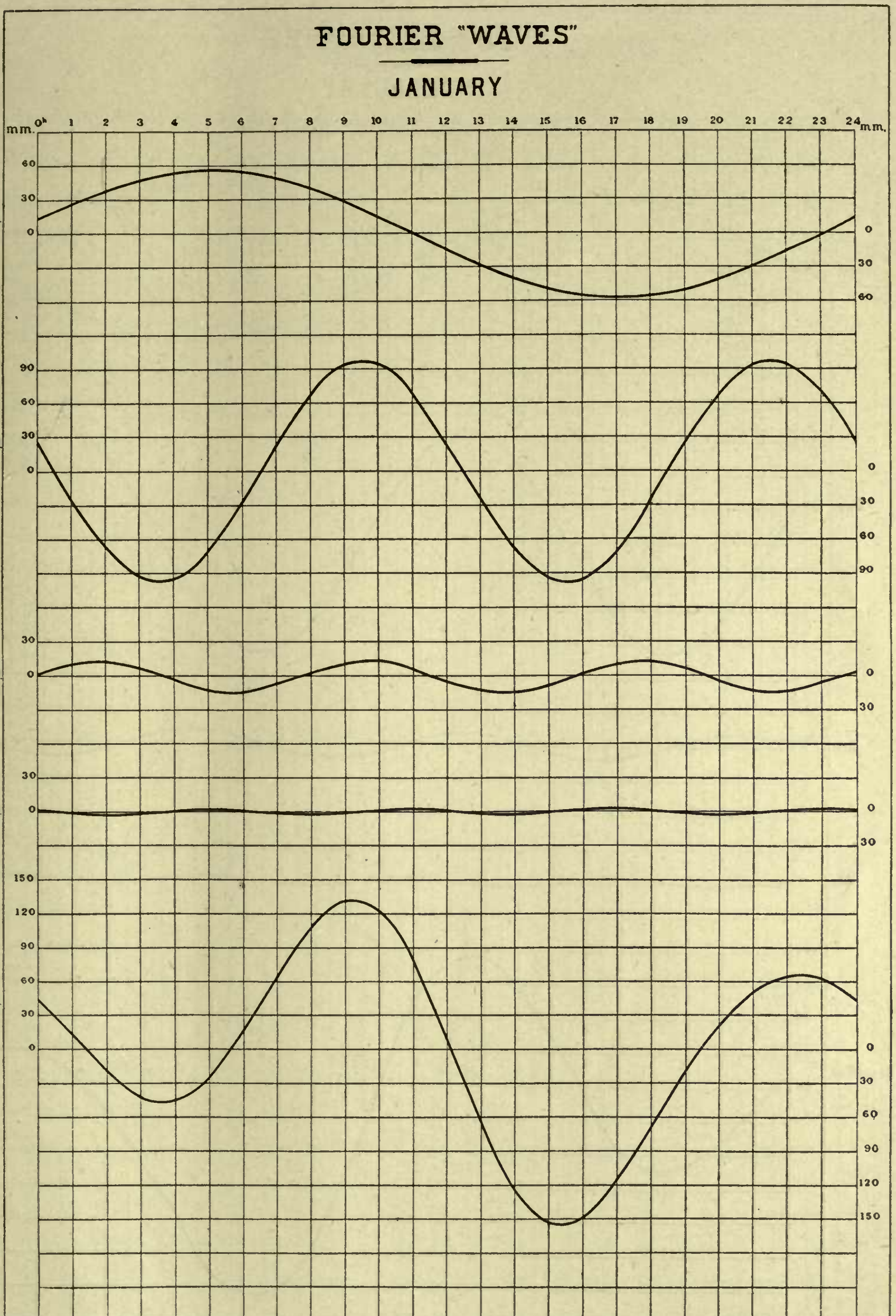
Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.199	+0.247	+0.040	+0.007	+0.493	—0.01
1	+ .298	— .241	+ .066	— .024	+ .099	+ .02
2	+ .376	— .663	+ .053	— .030	— .264	— .01
3	+ .429	— .908	+ .009	— .007	— .477	— .04
4	+ .452	— .910	— .040		— .474	+ .02
5	+ .444	— .667			— .259	+ .04
6	+ .407	— .247			+ .114	— .03
7	+ .341				+ .549	— .03
8	+ .252				+ .925	+ .01
9	+ .146				+1.113	0
10	+ .030				+1.017	— .01
11	— .087				+ .619	+ .03
12	— .199				+ .015	— .03
13					— .629	— .02
14					—1.122	+ .02
15					—1.353	+ .05
16					—1.298	— .03
17					—1.015	— .06
18					— .594	+ .03
19					— .115	+ .04
20					+ .341	— .03
21					+ .689	— .02
22					+ .851	0
23					+ .775	+ .01

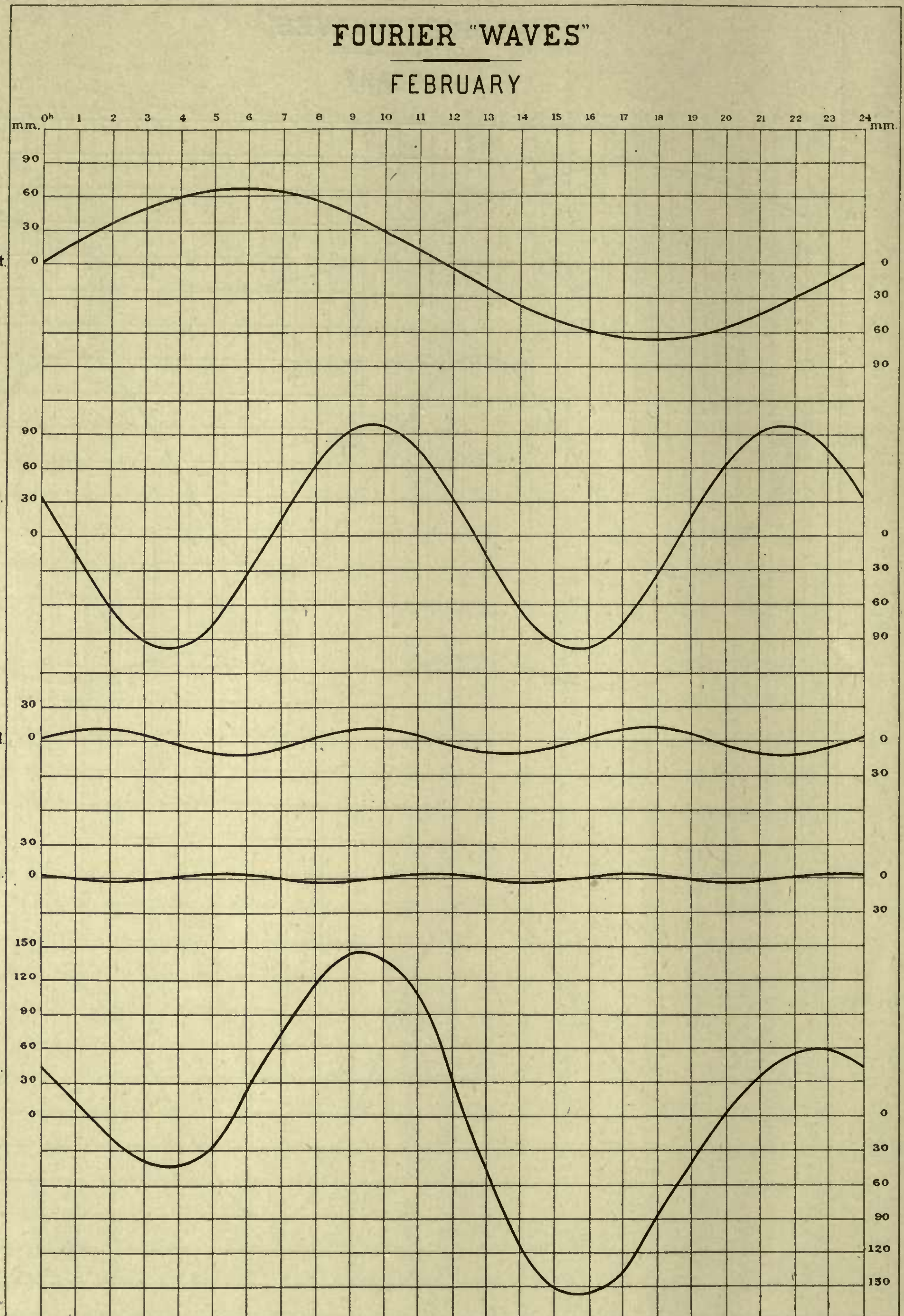
NOVEMBER.

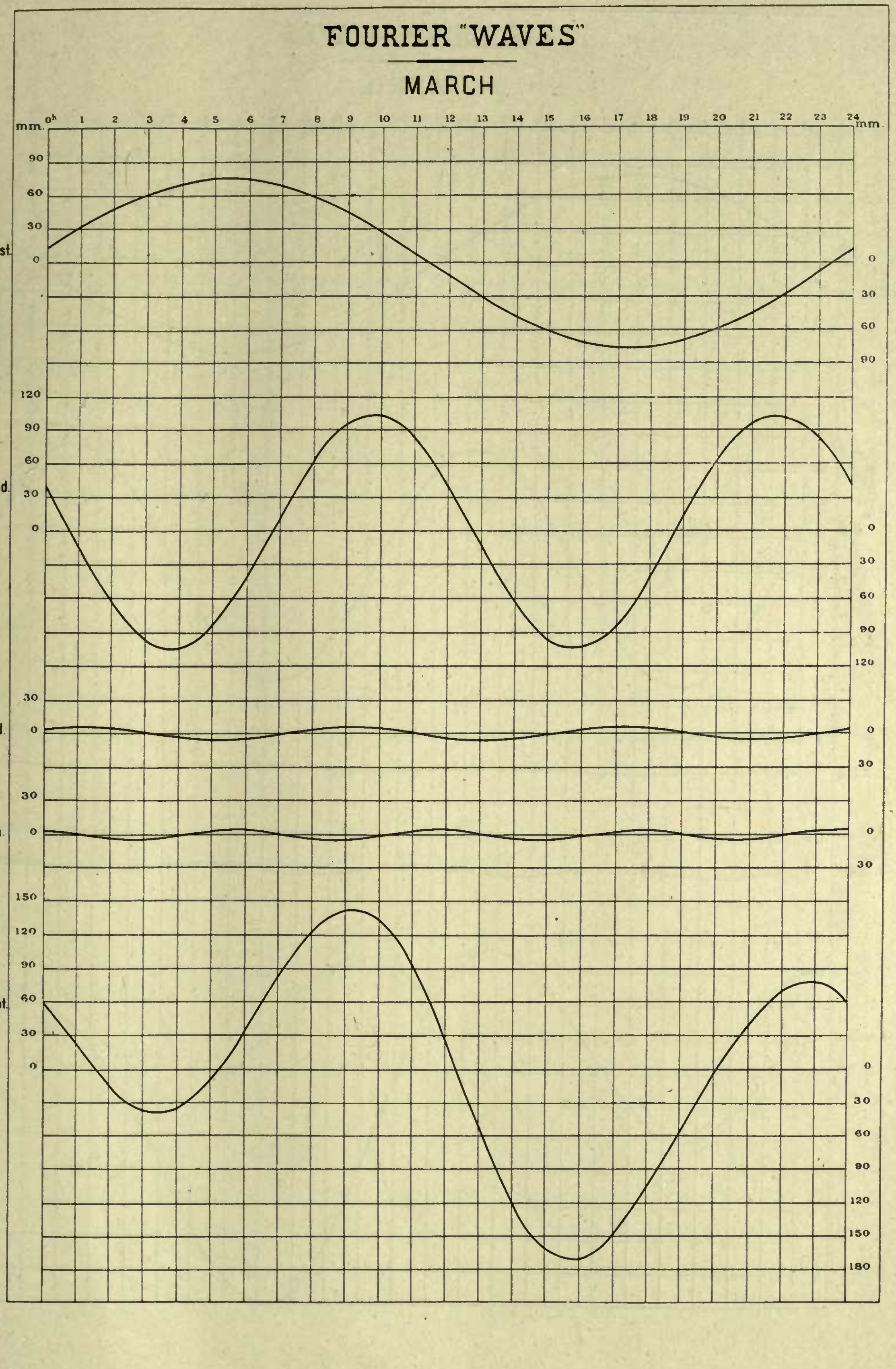
Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.184	+0.203	+0.050	+0.012	+0.449	—0.01
1	+ .281	— .286	+ .094	— .045	+ .044	— .06
2	+ .358	— .698	+ .083	— .057	— .314	— .05
3	+ .411	— .924	+ .024	— .012	— .501	+ .05
4	+ .436	— .902	— .050		— .471	+ .04
5	+ .431	— .638			— .244	+ .05
6	+ .397	— .203			+ .123	— .03
7	+ .336				+ .553	— .04
8	+ .252				+ .943	— .03
9	+ .151				+1.157	— .02
10	+ .039				+1.069	+ .05
11	— .075				— .644	+ .02
12	— .184				— .019	— .02
13					— .706	— .03
14					—1.196	— .01
15					—1.371	+ .01
16					—1.243	+ .03
17					— .918	0
18					— .505	+ .05
19					— .071	— .02
20					+ .339	— .09
21					+ .667	— .02
22					+ .825	+ .05
23					+ .746	+ .07

DECEMBER.

Hour.	Fourier "waves." First.	Second.	Third.	Fourth.	Resultant.	Departures from observed values.
0	+0.189	+0.217	+0.034	+0.019	+0.459	—0.01
1	+ .296	— .277	+ .110	— .050	+ .079	— .10
2	+ .382	— .698	+ .122	— .069	— .263	— .01
3	+ .443	— .931	+ .063	— .019	— .444	+ .05
4	+ .473	— .915	— .034		— .426	+ .02
5	+ .471	— .653			— .223	+ .02
6	+ .436	— .217			+ .116	+ .03
7	+ .373				+ .537	— .01
8	+ .284				+ .967	— .07
9	+ .175				+1.197	— .02
10	+ .054				+1.141	+ .08
11	— .070				+ .715	+ .06
12	— .189				+ .013	— .05
13					— .733	— .04
14					—1.271	— .04
15					—1.456	+ .02
16					—1.304	+ .04
17					— .945	+ .01
18					— .512	+ .04
19					— .083	— .02
20					+ .311	— .07
21					+ .627	— .03
22					+ .789	+ .07
23					+ .729	+ .10


FOURIER "WAVES"
JANUARY
mm.
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
60
30
0
90
150
120


FOURIER "WAVES"
FEBRUARY
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
90 60 30 0
150 120 90 60 30 0


FOURIER "WAVES"
MARCH
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
90 60 30 0 30 60 90
120 90 60 30 0 30 60 90 120
30 0 30
150 120 90 60 30 0 30 60 90 120 150 180

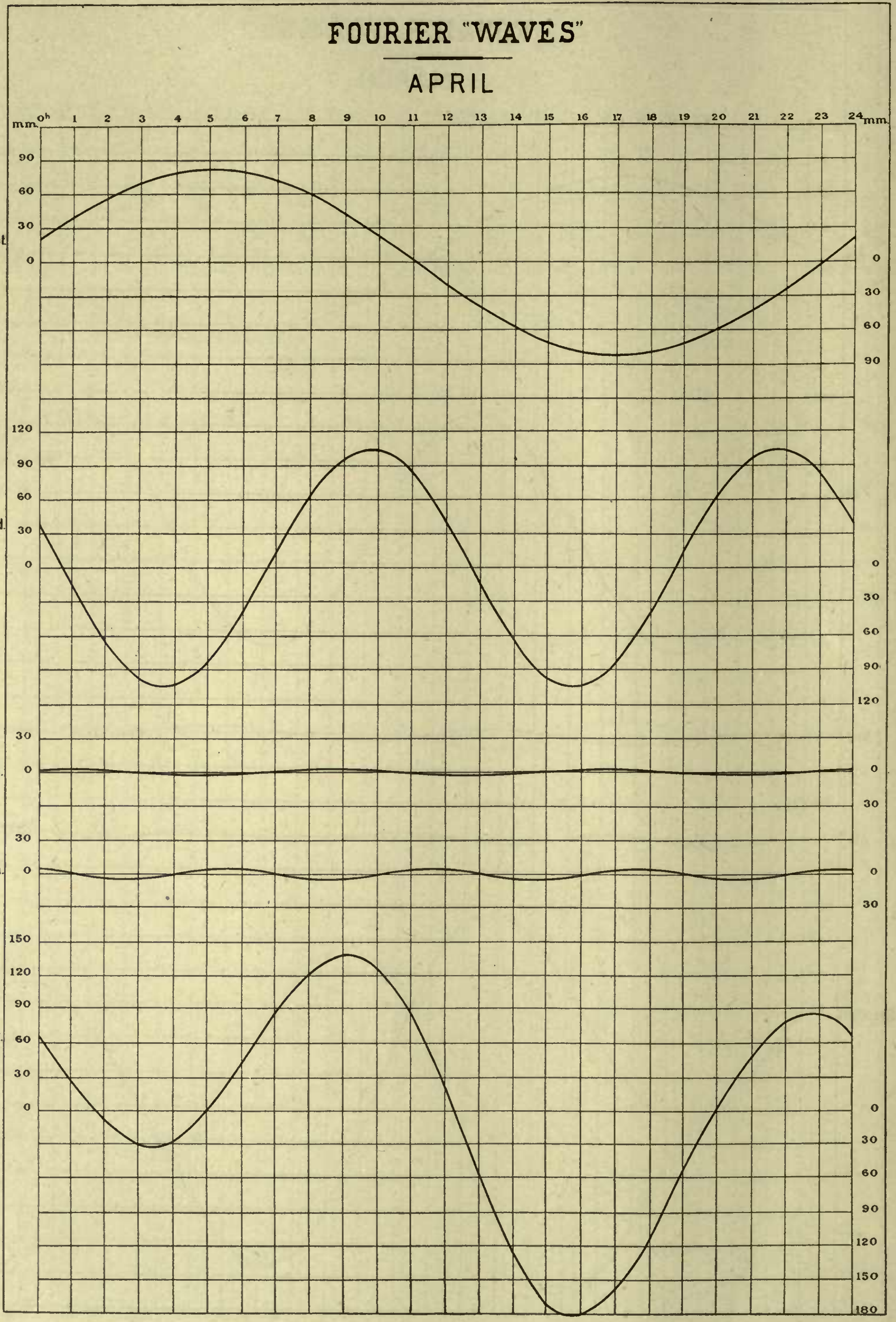
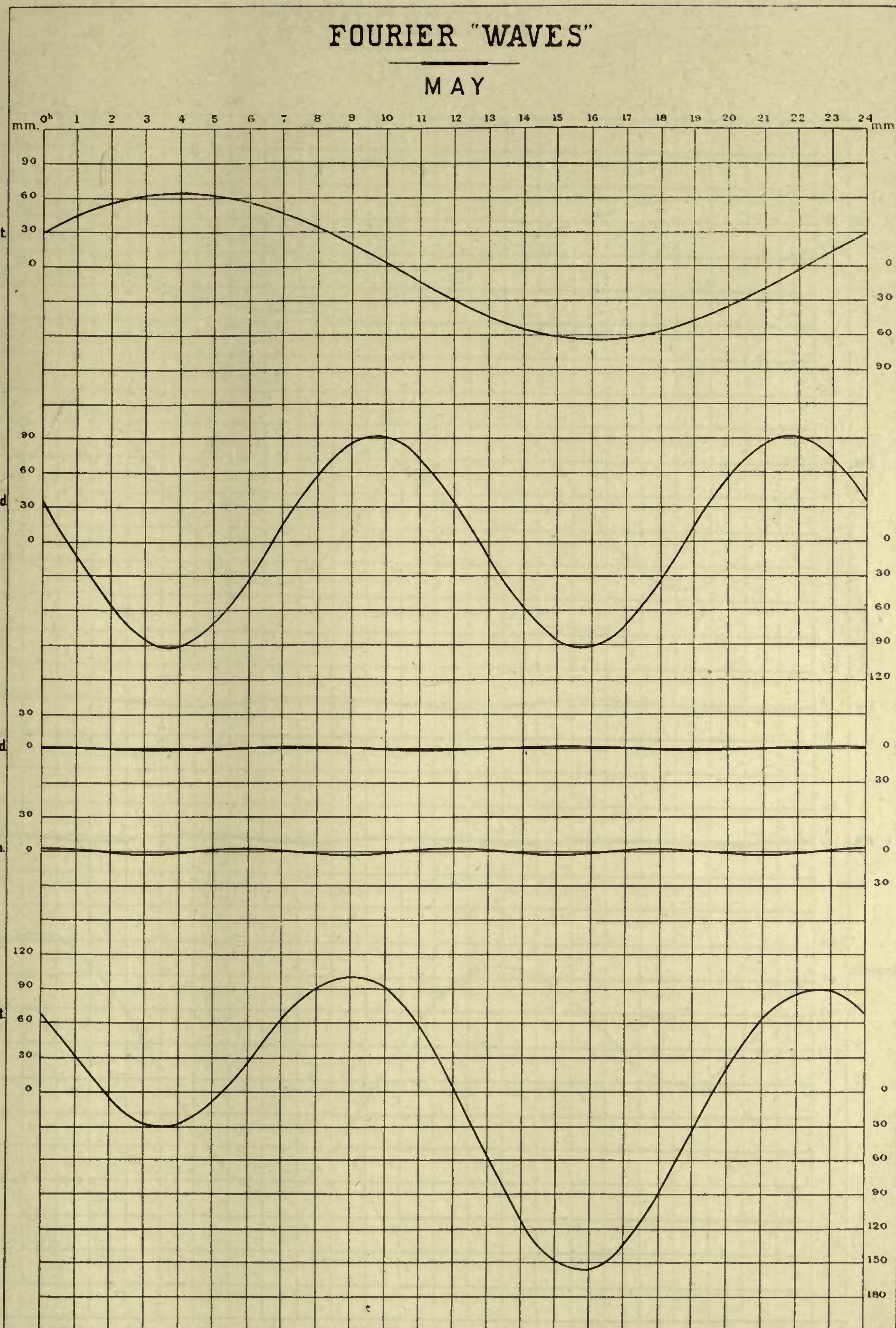
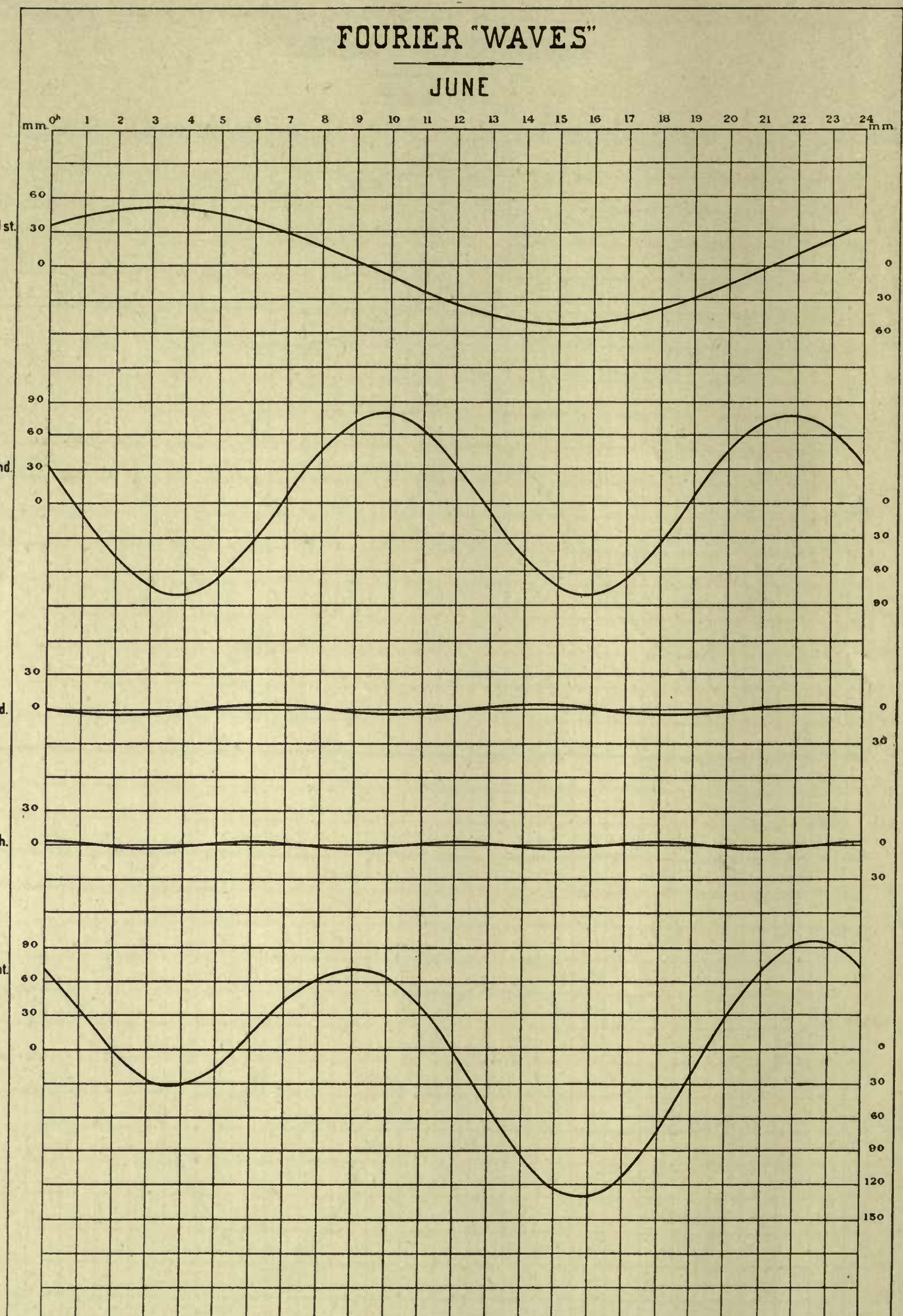
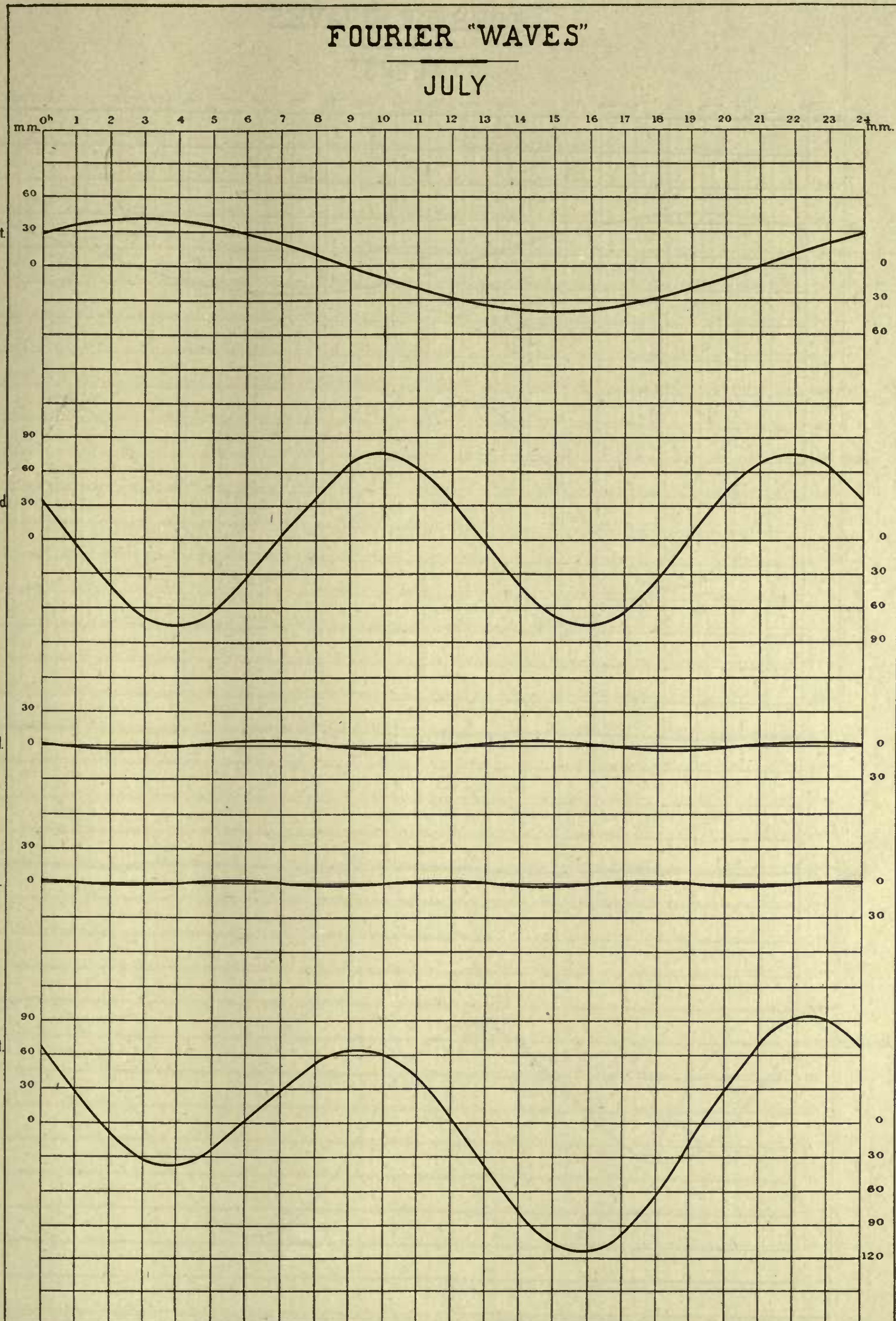
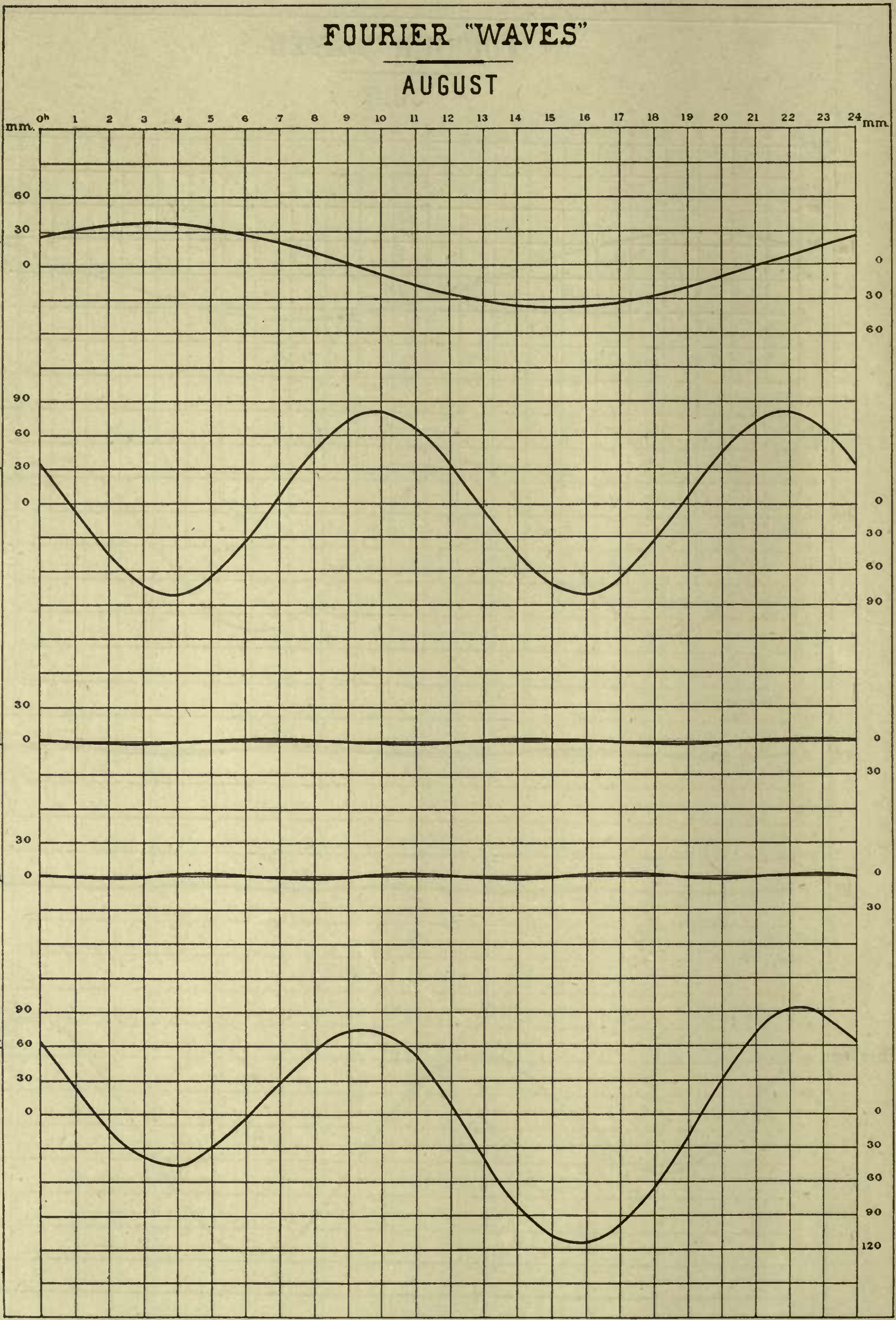

FOURIER "WAVES"
APRIL
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
90 60 30 0 30 60 90
120 90 60 30 0 30 60 90 120
30 0 30
150 120 90 60 30 0 30 60 90 120 150 180

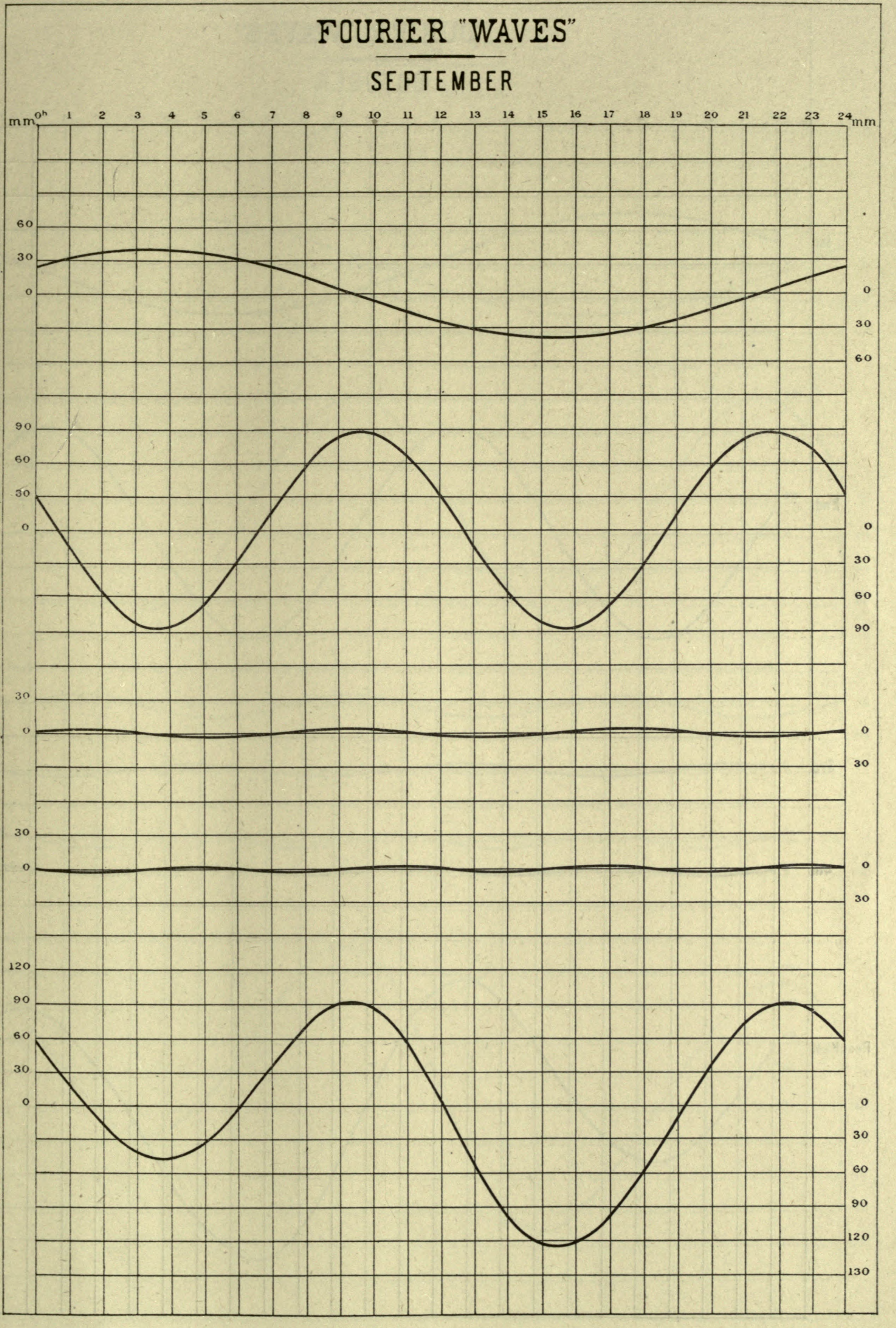
Plate V.

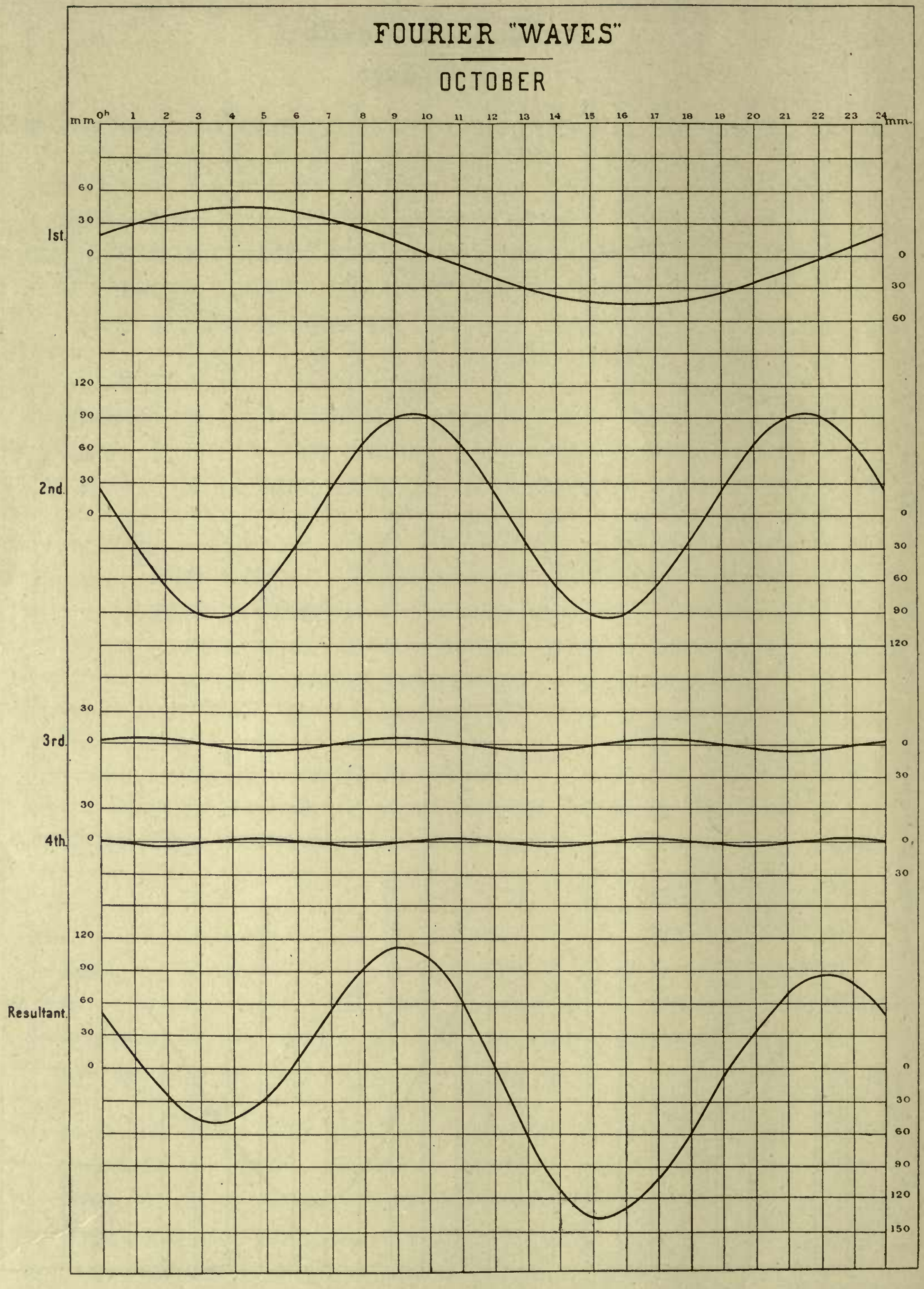

FOURIER "WAVES"
MAY
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
mm.
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
90
60
30
0
120
150
180

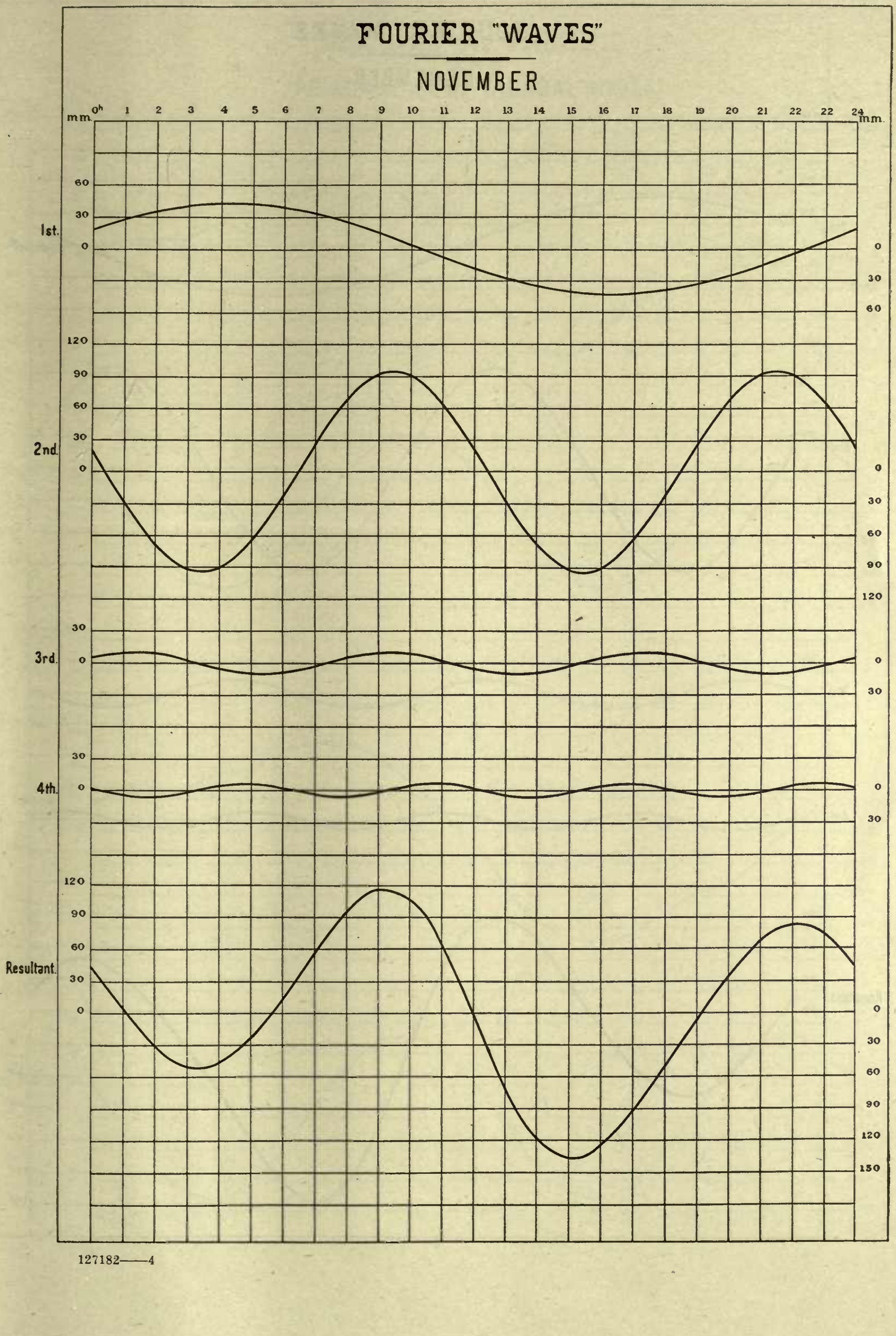

FOURIER "WAVES"
JUNE
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm
1st.
60
30
0
0
30
60
2nd.
90
60
30
0
0
30
60
90
3rd.
30
0
0
30
4th.
30
0
0
30
Resultant.
90
60
30
0
0
30
60
90
120
150

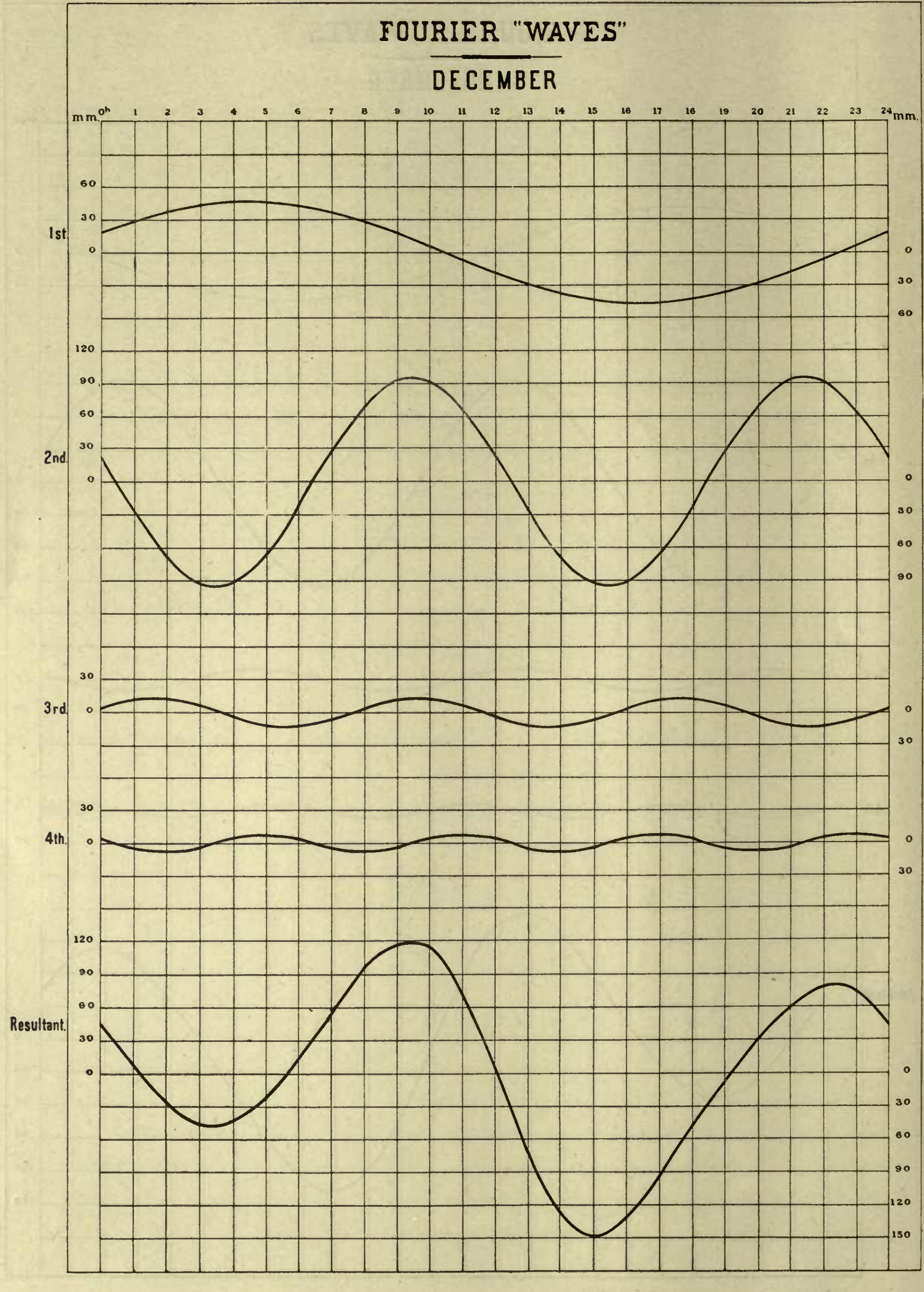

FOURIER "WAVES"
JULY
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
mm.
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.

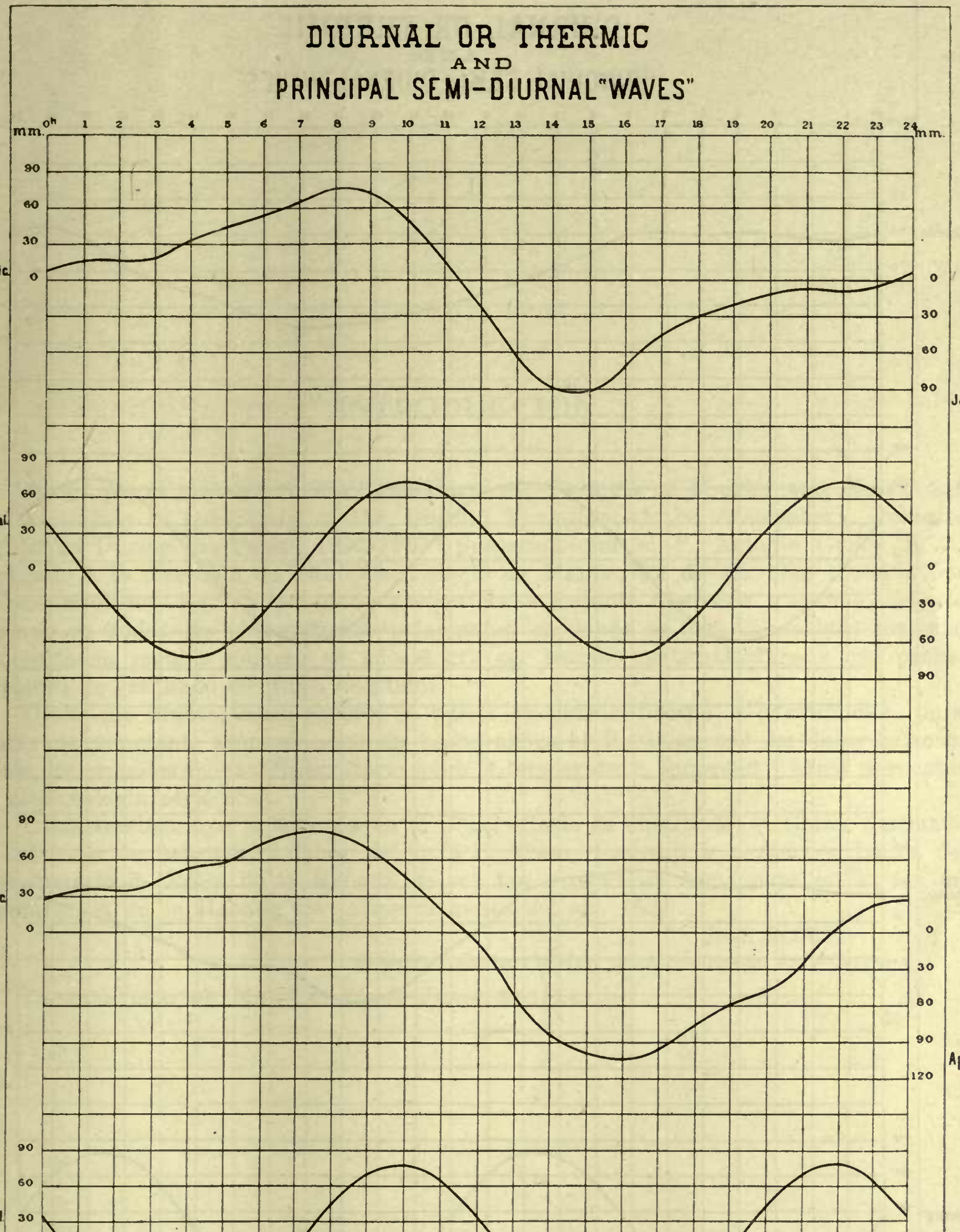

FOURIER "WAVES"
AUGUST
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant
60 30 0
0 30 60
90 60 30 0
0 30 60 90
30 0
0 30
30 0
0 30
90 60 30 0
0 30 60 90 120

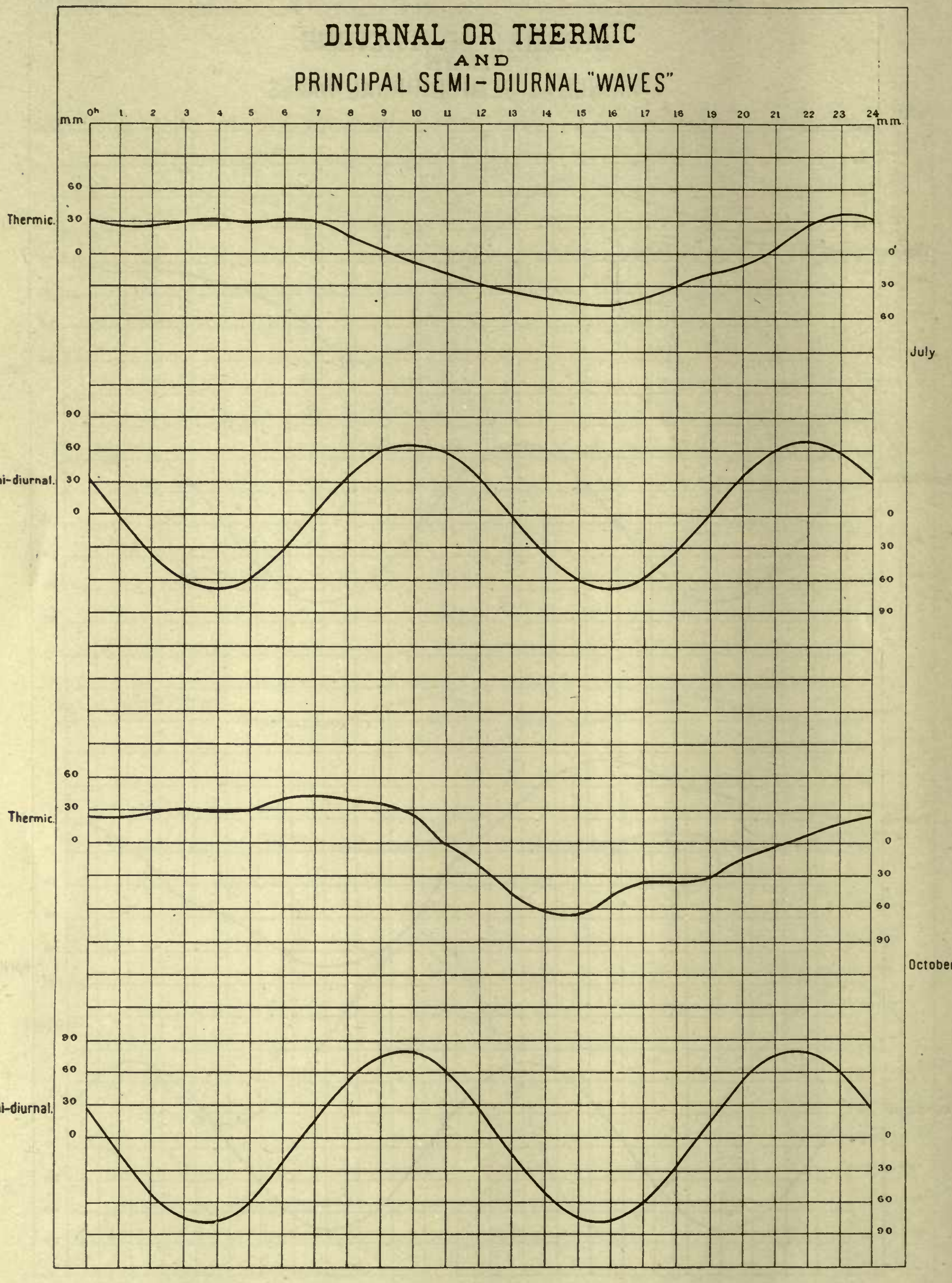

FOURIER "WAVES"
SEPTEMBER
mm
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm
1st.
60
30
0
0
30
60
2nd
90
60
30
0
0
30
60
90
3rd.
30
0
0
30
4th
30
0
0
30
Resultant
120
90
60
30
0
0
30
60
90
120
130


FOURIER "WAVES"
OCTOBER
mm
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
60
30
0
90
120
150


FOURIER "WAVES"
NOVEMBER
mm.
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 22 24
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
60
30
0
120
90
150


FOURIER "WAVES"
DECEMBER
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
1st.
2nd.
3rd.
4th.
Resultant.
60
30
0
90
120
150


DIURNAL OR THERMIC
AND
PRINCIPAL SEMI-DIURNAL "WAVES"
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
mm.
Thermic
Semi-diurnal
Thermic
Semi-diurnal
January.
April.
90
60
30
0
30
60
90
120


DIURNAL OR THERMIC
AND
PRINCIPAL SEMI-DIURNAL "WAVES"
mm
mm.
0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
Thermic.
Semi-diurnal.
Thermic.
Semi-diurnal.
60
30
0
90
July
October

INTRODUCCIÓN.

Juzgo que el presente folleto "The Harmonic Formula of Fourier and Bessel, and Its Aplication to the Study of the Diurnal Variation of the Atmospheric Pressure in Manila During the Period 1890–1909" preparado por el P. Antonio Galán, S. J., agregado a la dirección de este Observatorio de Manila, ha de ser bien recibido por los meteorólogos, los cuales son de parecer que semejante discusión o estudio debería hacerse en todos los observatorios principales, en donde se haya acumulado material suficiente en regular número de años, para ser tratado matemáticamente con probabilidades de resultado científico aceptable.

Ojalá que pronto, como espero, se pueda encontrar tiempo y oportunidad, para tratar de semejante manera como ha hecho ahora el P. Galán con los datos barométricos, los reunidos en este Observatorio sobre la temperatura, humedad y otros elementos de meteorología periódicos.

Ojalá también que la estancia en el Observatorio de Manila del P. Galán, destinado a continuar la benemérita labor de los PP. Viñes, Gangoiti y Gutiérrez Lanza del Observatorio de Belén de la Habana, le sea tan provechosa como para mí lo fué mi permanencia en la Habana los primeros meses del año 1892.

JOSÉ ALGUÉ,
Director de la Oficina Meteorológica de Filipinas.

OBSERVATORIO DE MANILA, *19 de Junio de 1914.*

FÓRMULA ARMÓNICA DE FOURIER Y DE BESSEL.

La fórmula armónica de Fourier y de Bessel suele presentarse en una de las dos formas siguientes:

(I) $y=M+p_1 \cos x+q_1 \operatorname{sen} x+p_2 \cos 2x+q_2 \operatorname{sen} 2x+p_3 \cos 3x+q_3 \operatorname{sen} 3x+\ldots\ldots$

(II) $y=M+u_1 \operatorname{sen} (U_1+x)+u_2 \operatorname{sen} (U_2+2x)+u_3 \operatorname{sen} (U_3+3x)+\ldots\ldots$

Fácilmente se ve que estas dos fórmulas son una misma bajo distinta forma, pues desarrollando la (II) se tiene:

$$y=M+u_1 \operatorname{sen} U_1 \cos x+u_1 \cos U_1 \operatorname{sen} x+u_2 \operatorname{sen} U_2 \cos 2x+u_2 \cos U_2 \operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots$$

y haciendo en esta expresión

$$u_1 \operatorname{sen} U_1=p_1 \qquad u_1 \cos U_1=q_1$$
$$u_2 \operatorname{sen} U_2=p_2 \qquad u_2 \cos U_2=q_2$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

la (II) queda reducida a la (I).

Las aplicaciones de esta fórmula son muy numerosas e importantes.

El teorema de Fourier (dicen Thomson y Tait) además de ser uno de los más bellos resultados del análisis moderno, puede decirse que es instrumento indispensable para abordar casi todas las recónditas cuestiones de la física moderna. Decir que las vibraciones sonoras, la propagación de las señales eléctricas a lo largo del hilo del telégrafo y la conducción del calor por la corteza terrestre son cuestiones en su generalidad imposibles de discutir sin su auxilio, es dar únicamente una débil idea de su importancia.

En el presente trabajo nos limitaremos a la aplicación que de la fórmula se hace en meteorología; procuraremos declarar lo que cada uno de sus elementos representa, y haremos algunas indicaciones sobre su utilidad y el modo práctico de servirse de ella.[1]

La mayor parte de los fenómenos que se estudian en meteorología son periódicos; las curvas que los representan son, por lo tanto, curvas periódicas, es decir, curvas que representan el movimiento de un punto, que recorre un número indeterminado de veces el mismo camino en el mismo tiempo.

Análogamente a lo que Helmholtz demuestra en acústica, que un mismo sonido compuesto se resuelve *siempre en los mismos* sonidos elementales, probó Fourier que cualquiera curva periódica se puede descomponer en una serie de curvas armónicas de períodos, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., de la curva dada; y que *sólo es posible una combinación* de estas curvas elementales, para reproducir una curva determinada.

Prescindiendo por ahora de la utilidad práctica que esta descomposición de las curvas pueda tener en meteorología, vamos a ver cómo la fórmula que estudiamos no es otra cosa que la expresión analítica de las curvas periódicas en términos de sus componentes armónicas.

Dícese *curva armónica* la que representa gráficamente el movimiento armónico de un punto.

---

[1] Uno de los mejores trabajos prácticos que conocemos sobre el empleo de las series de Fourier en física matemática es el de W. E. Byerly "An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical Harmonics" publicado por Ginn and Co., New York.

La obra original del mismo Fourier "Théorie Analytique de la Chaleur" es quizá de tanta actualidad como cualquiera otra publicación moderna sobre esta materia. Puede consultarse también Mellor "Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics," Longmans, Green and Co., 39 Paternoster Row, London.

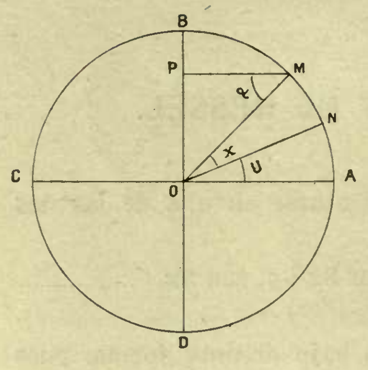


Fig. 1

Movimiento armónico es aquel a que estaría sometida la proyección sobre un diámetro de un punto que recorriera la circunferencia con movimiento uniforme. Esta circunferencia recibe el nombre de *círculo de referencia.*

Si el punto M (fig. 1) recorre la circunferencia con movimiento uniforme, el movimiento de su proyección P sobre el diámetro BD es armónico; mientras M describe una vez la circunferencia en el sentido $ABCDA$, al punto P recorre el diámetro en el sentido $OBODO$.

En gracia de aquellos que no estén familiarizados con el estudio de esta clase de movimientos, permítasenos recordar algunas definiciones, que hemos de necesitar.

Período es el tiempo que emplea el punto M en recorrer la circunferencia, o el punto P en su doble recorrido del diámetro.

Elongación es la distancia variable del centro O al punto P.

Amplitud es la elongación máxima, o distancia máxima a que puede separarse de O el punto P en su movimiento; como se vé, es el radio del círculo de referencia.

Los puntos O y A son el origen de los movimientos de los puntos P y M respectivamente. El origen de los tiempos es arbitrario; puede tomarse en cualquier punto de la circunferencia.

Fase es la distancia angular del punto móvil al origen del movimiento. Tratándose del punto que se mueve sobre el diámetro, hay que referirle al círculo de referencia para determinar sus fases; así en la figura 1, si el punto se encuentra en P, su fase está dada por los grados del arco MA o del ángulo MOA.

Época de una fase determinada es el instante en que ocurre esa fase; así, en nuestro caso, si el arco MA es de 60° y han transcurrido dos horas desde que el punto se encontraba en el origen de los tiempos diremos que las 2^h es la época de la fase de 60°.

Fase inicial es la distancia angular del origen de los tiempos al origen de los movimientos. En nuestra figura, si tomamos al punto N como origen de los tiempos, la fase inicial del movimiento está dada por el arco NA.

Supongamos, para fijar las ideas, que el punto M emplea un día en recorrer la circunferencia—es decir, que el período de su movimiento es veinticuatro horas. A partir de N, origen de los tiempos (fig. 2), dividamos la circunferencia en 24 partes iguales; y rectifiquémosla sobre la recta NX; esta queda dividida en 24 partes iguales, cada una de las cuales representa la longitud de un arco de 15°, o en tiempo, una hora. Hagamos que el círculo de referencia se desplace sobre la recta NX paralelamente al diámetro vertical, con un movimiento igual al del punto que la recorre. Al fin de cada hora encontraremos

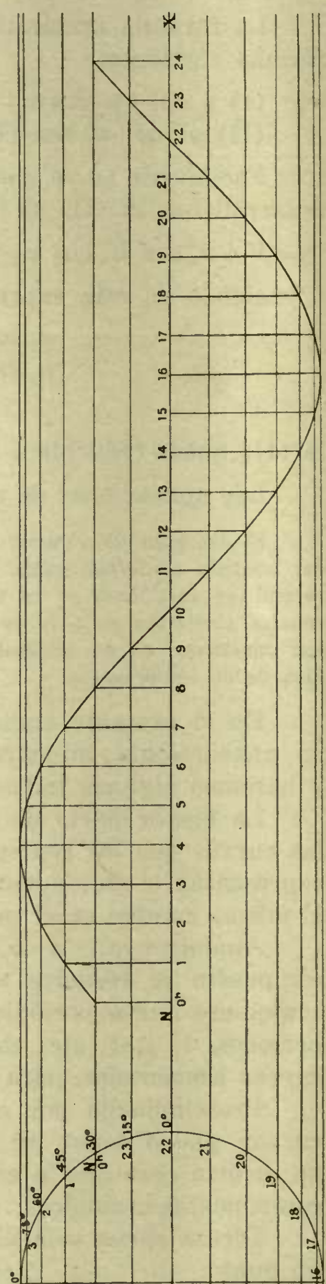


Fig. 2.

el centro O en los puntos sucesivos en que ha quedado dividida la recta, y el punto que se mueve sobre el diámetro irá describiendo la sinusoide de la figura.

Si quisiéramos trazar otra curva armónica de período $\frac{1}{2}$ del de la anterior, las partes en que se habría de dividir el círculo de referencia, serían de doble número de grados que las anteriores, pues es claro que para que la circunferencia quede recorrida en doce horas, el punto habrá de recorrer 30° cada hora; y así para curvas de período $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., ... del de la primera, los respectivos círculos de referencia habrían de dividirse en partes, cuyo número de grados fuera triple, cuádruple, etc.; por donde vemos que los períodos de estas curvas están en razón inversa del número de grados de las partes en que se dividen sus círculos de referencia.

Una ordenada cualquiera en la curva, representa la distancia a que se encuentra de O el punto P en la hora correspondiente. Designemos por y_1, y_1', y_1'', etc., estas ordenadas. Del triángulo rectángulo POM (fig. 1) deducimos como expresión general de las ordenadas—

$$OP = y = OM \operatorname{sen} \alpha = u \operatorname{sen} (U+x)$$

donde u es el radio del círculo de referencia, o amplitud de la curva; U la fase inicial, y x representa en cada caso el número de partes de la circunferencia que para ese momento ha recorrido el punto M.

Partiendo ahora de estas consideraciones, obtenemos para las distintas ordenadas de las curvas armónicas características de una curva periódica cualquiera las expresiones siguientes:

	Primera ordenada.	Segunda ordenada.	Tercera ordenada.	
Primera curva	u_1 sen U_1	u_1 sen (U_1+x)	u_1 sen (U_1+2x)	....
Segunda curva	u_2 sen U_2	u_2 sen (U_2+2x)	u_2 sen (U_2+4x)	....
Tercera curva	u_3 sen U_3	u_3 sen (U_3+3x)	u_3 sen (U_3+6x)	....
------------------------------	------------	--------------------	------------------------	---------------

Sumando algebraicamente las ordenadas del mismo nombre, obtenemos para las ordenadas correspondientes de la curva periódica resultante las expresiones siguientes:

Resultante.

Primera ordenada $= u_1 \operatorname{sen} U_1 + u_2 \operatorname{sen} U_2 + u_3 \operatorname{sen} U_3 + \ldots\ldots$

Segunda ordenada $= u_1 \operatorname{sen} (U_1+x) + u_2 \operatorname{sen} (U_2+2x) + u_3 \operatorname{sen} (U_3+3x) + \ldots\ldots$

Tercera ordenada $= u_1 \operatorname{sen} (U_1+2x) + u_2 \operatorname{sen} (U_2+4x) + u_3 \operatorname{sen} (U_3+6x) + \ldots\ldots$

----

que, como fácilmente se vé, no son más que expresiones particulares de la fórmula general—

$$u_1 \operatorname{sen} (U_1+x) + u_2 \operatorname{sen} (U_2+2x) + u_3 \operatorname{sen} (U_3+3x) + \ldots\ldots$$

en la que el elemento variable x va tomando los valores que le corresponden según lo explicado.

Deducida por este procedimiento la fórmula de Bessel, aparece claramente lo que al principio dijimos, que es la expresión analítica de una curva periódica en términos de sus componentes armónicas; cada uno de sus términos representa una de estas componentes.

Las constantes u y U suelen denominarse: la primera *coeficiente armónic lineal;* la segunda coeficiente armónico angular (o ángulo de posición del punto de partida del elemento variable), pues ellas son las que caracterizan el movimiento armónico que se estudia; la u da la amplitud, y por tanto la importancia del movimiento; pues, como fácilmente se vé en las figuras precedentes, a medida que decrece u, el movimiento del punto P sobre el diámetro va siendo más lento; la U (fig. 2) fija la época de las distintas fases; un aumento en su valor hace adelantar la época de todas las fases, y al contrario una disminución la retrasa.

Es de suma importancia tener presente esta propiedad de la fase inicial; si en una

estación cuya longitud fuera, por ejemplo, 15° W. de Greenwich se quisiera calcular en tiempo medio de Greenwich en vez de en tiempo medio local, se adelanta una hora el origen de los tiempos, y por consiguiente hay que disminuir el valor de las fases iniciales, 15° en U_1, 30° en U_2, 45° en U_3, etc. Por esta razón debe hacerse constar en las publicaciones el tiempo en que se calcula.

La cantidad M que aparece en la fórmula representa la media aritmética de las observaciones que entran en la discusión. Lo que se desarrolla en la serie trigonométrica de la fórmula es la diferencia entre cada observación y la media aritmética de todas ellas; por consiguiente, para que nuestras observaciones (o las ordenadas de las curvas de observación) queden representadas según esta fórmula, hemos de agregar la media aritmética al desarrollo de estas diferencias.

Creemos que lo dicho hasta aquí será suficiente para formarse una idea general del mecanismo de la fórmula; en la aplicación que haremos de ella al estudio de la variación diurna de la presión atmosférica en Manila procuraremos concretar más estas ideas.

APLICACIÓN DE LA FÓRMULA AL ESTUDIO ANALÍTICO DE LA VARIACIÓN DIURNA DE LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA EN MANILA EN EL PERÍODO 1890–1909.

En la preparación de los datos que habían de entrar directamente en el cálculo hemos procedido de la manera siguiente:

De las publicaciones oficiales de este Observatorio tomamos las medidas horarias de cada mes, calculando además por separado la media correspondiente a la hora *cero*, o primera medianoche del día representativo de cada mes; esta media es el valor medio de las lecturas de la primera medianoche de cada día del mes. Como la hora *cero*, o primera medianoche de un día, es la última medianoche del anterior, en un mes cualquiera (Enero por ejemplo) las lecturas de las 0^h serán: Para el día 1.° la lectura de las 12 p. m. del último día de Diciembre del año anterior; la del día 2, la de las 12 p. m. del día 1.° del mismo Enero, etc., de modo que, los valores que entran en el promedio de esta hora son los mismos que entran en el de las 12 p. m. a excepción de la lectura de las 12 p. m. del último día del mes; que es sustituída por la correspondiente del mes anterior.

Fácilmente se ve que, teniendo ya calculada la media de las 12 p. m. basta, para calcular la de las 0^h, restar la lectura de las 12 p. m. del último día del mes de que se trata, de la lectura correspondiente en el mes anterior; dividir esta diferencia por el número de días del mes en cuestión, y sumar algebraicamente el resultado a la media de las 12 p. m.

Obtenidas estas 25 medias horarias, se han calculado las medias horarias generales de los doce meses para todo el período, agrupando los meses del mismo nombre, y promediando las medias obtenidas para cada hora de un mismo mes en los distintos años. Estas medias horarias generales se han aproximado hasta las milésimas, y son las que forman la Tabla I.

La Tabla II es la misma Tabla I en la que se ha eliminado el elemento aperiódico. Vamos a explicar brevemente en qué consiste esta corrección, y cuál es su fin.

Variación no cíclica, o aperiódica.—En la explicación de la fórmula vimos que las curvas armónicas elementales constan en su integridad de 25 ordenadas, correspondientes a las distintas horas del día, de 0^h a 24^h, ambas inclusive. Las ordenadas extremas son iguales para una misma curva; por tanto las ordenadas correspondientes a las 0^h y 24^h en la curva resultante han de ser iguales, por ser la suma algebraica de las ordenadas correspondientes en las distintas curvas elementales.

Ahora se entenderá por qué es necesario calcular la media de las 0^h; es preciso asegurarse de que la curva que se va a analizar *como periódica*, cumple con el carácter esencial de periodicidad de que sus ordenadas extremas sean iguales. En caso de no serlo,

debemos deducir que se ha introducido en la marcha del fenómeno algún elemento que perturba su periodicidad. Esta perturbación es la que suele denominarse *variación no cíclica* o *aperiódica.*

Cuál sea de ordinario el origen de esta variación, se entenderá fácilmente con un ejemplo bien familiar.

En las distintas estaciones del año varía la temperatura de modo que va subiendo en primavera y verano, y bajando durante el otoño e invierno; así que en Mayo, por ejemplo, aunque no puede decirse en general que la temperatura de un día sea más elevada que la del precedente, pero si queremos calcular la variación media diurna de la temperatura en ese mes para un año cualquiera, tomando para cada hora del día el valor medio de aquella hora, derivado de los treinta y un días, notaremos que la temperatura de la primera medianoche del día representativo de Mayo es algo más baja que la de la última medianoche del mismo día.

En el caso de observaciones barométricas nos encontramos con un fenómeno análogo. Es bien sabido que la presión atmosférica está sujeta a una oscilación anual, que se sobrepone, como en el caso de la temperatura, a la oscilación diurna. Al estudiar pues los caracteres propios de la variación diurna mensual de la presión atmosférica, debemos comenzar por la eliminación del elemento aperiódico.

Esta eliminación suele hacerse aplicando a cada hora la corrección—

$$\frac{D(12-h)}{24}$$

en la que D se obtiene restando del valor de la hora 24 el de la hora *cero*, y h representa la hora en la que se va a aplicar la corrección. No estará demás alguna discusión sobre la legitimidad de esta fórmula. Es lógica esta corrección únicamente si se admite la hipótesis de que la diferencia entre los valores de las dos horas extremas se ha introducido por una variación uniforme durante las veinticuatro horas.

El probar si es, o no, legítima esta suposición no carece de dificultad; sin embargo, cuando la investigación se limita a las veinticuatro horas, se la da por buena, pues parece la única hipótesis aceptable.

Veamos cómo la fórmula supone implícitamente esta hipótesis. Si la variación se supone uniforme durante las veinticuatro horas, ha de estar representada por una recta. La fórmula de corrección será por lo tanto la ecuación de la recta—

$$y=b+ax \quad (1)$$

Tomemos como origen de coordenadas rectangulares la hora *cero*, y llevemos, como de ordinario, las horas al eje X. En la fórmula (1) la x representará las horas sucesivas; la y, la corrección que hay que aplicar en cada una. Aplicada la corrección a las dos horas extremas, sus valores han de venir a coincidir; luego hay que añadir a la una y restar de la otra la semidiferencia de sus valores. La corrección para estas dos horas, llamando D su diferencia será por consiguiente—

$$\text{para la hora 24} \ldots\ldots \pm\frac{D}{2}=b+24a$$

$$\text{para la hora 0} \ldots\ldots \mp\frac{D}{2}=b$$

Eliminando a b entre estas dos ecuaciones obtenemos—

$$\pm D=24a \;\therefore\; a=\pm\frac{D}{24}$$

Llevando a la ecuación (1) los valores obtenidos para a y b, queda—

$$y=\mp\frac{D}{2}\pm\frac{D}{24}x=\frac{D(12-x)}{24}$$

Los signos quedarán determinados por el que tenga D en cada caso particular. Vemos pues que, para la deducción de la fórmula de corrección, es necesaria y suficiente la hipótesis de que la variación aperiódica se verifique de un modo uniforme durante las veinticuatro horas.

Un ejemplo hará ver qué influencia ejerce esta corrección en las curvas.

Tomemos el mes de Noviembre, que es en nuestro caso, el que tiene mayor corrección. La curva llena (fig. 3) representa la variación sin corregir; la punteada representa la misma variación corregida.

Por la forma y posición de estas curvas se vé claramente, que la eliminación del elemento aperiódico se reduce a hacer girar la curva un ángulo pequeñísimo, tomando las 12 a. m. como centro, sin que en nada varíen sus ondulaciones características.

Hecha esta corrección, se han calculado para la Tabla II las medias diurnas, dividiendo por 24 la suma de las 24 medias horarias de cada mes, de 0^h a 23^h; y restando luego en cada mes la media diurna, de cada media horaria, se ha formado la Tabla III, que es la que contiene los datos de que nos vamos a servir en el cálculo.

En esta última evaluación hemos aproximado únicamente hasta las centésimas; pero, como en los cálculos anteriores llevamos la aproximación hasta las milésimas, la inexactitud de los datos de la última tabla no puede pasar de media centésima, y la suma de los valores positivos no se diferencia en valor absoluto de la de los negativos más que en dos o tres centésimas a lo sumo, resultado que no se hubiera obtenido si en los cálculos anteriores se hubiera aproximado únicamente a centésimas.

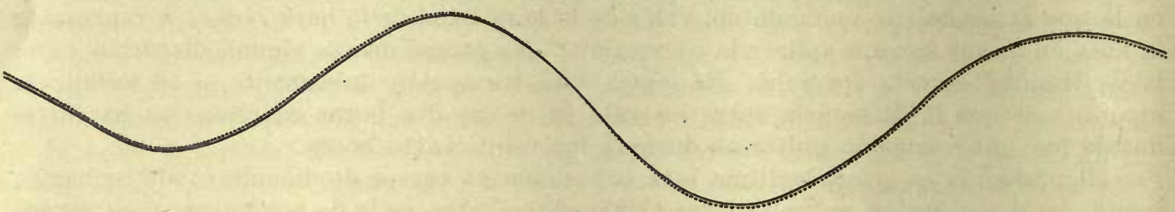


Fig. 3

En el estudio analítico que con los datos de esta tabla vamos a emprender hemos empleado el tiempo medio local.

Sabemos que lo único que necesitamos para la determinación de cada una de las ondas elementales, en las que vamos a resolver la variación barométrica diurna son: Los coeficientes armónicos lineales u, y los angulares U—es decir las constantes de la Fórmula II, por ser ellas, como al principio indicamos, las que caracterizan estas ondas.

Estas constantes no pueden hallarse directamente; hay que determinarlas valiéndose de las constantes p y q de la Fórmula I, que son las que se calculan directamente.

Las ecuaciones que relacionan estas constantes son, como vimos antes:

$$\left.\begin{aligned} p &= u \operatorname{sen} U \\ q &= u \cos U \end{aligned}\right\} (1)$$

De aquí se obtienen las relaciones:

$$\frac{\operatorname{sen} U}{\cos U} = \tan U = \frac{p}{q}; \ \operatorname{sen} U = \frac{p}{u}; \ \cos U = \frac{q}{u}$$

De la primera de estas tres ecuaciones podemos deducir la constante angular U en función de p y q; y de las dos últimas en función de p o q y u; esta última se obtiene por la ecuación:

$$u = \sqrt{p^2 + q^2}$$

que se deduce fácilmente de las ecuaciones (1) elevándolas al cuadrado, y sumando ordenadamente. Toda la dificultad está en determinar las constantes p y q.

El método que dió Bessel para determinarlas, y que explicaremos al fin de nuestro trabajo, es largo y penoso, y sobre todo, requiere una tensión constante en el trabajo para evitar los errores en que fácilmente se puede incurrir a causa, principalmente, del considerable número de ángulos que hay que reducir y por la frecuencia con que cambian de signo las líneas trigonométricas al pasar de uno a otro cuadrante. De este método dice al P. Dechevrens, S. J.: "La méthode naturelle n'est que pour les habiles." Este Padre ha publicado dos folletos, el uno titulado "Méthode simplifiée dite des facteurs pour le calcul des séries de Fourier et de Bessel appliquées a la Météorologie," en el que por medio de tablas, se facilita notablemente el cálculo. El otro folleto lleva el título "Note complémentaire á la méthode simplifiée du calcul, etc." [1] donde explica el procedimiento que ha seguido para la formación de sus tablas.

Las tres primeras de estas tablas sirven para la determinación de los coeficientes p y q, en series de 4, 6, 8, 10, 12, 24 y 36 observaciones.

Creemos no carecerá de interés, para quienes no esten avezados a esta clase de análisis, resolver prácticamente un ejemplo por el método de Bessel, y ver en qué está la utilidad de las tablas del P. Dechevrens; por esto, aún a riesgo de parecer nimios en detallar el cálculo, vamos a seguir paso por paso el método de Bessel en la determinación de las constantes p y q para Enero.

Las ecuaciones que en nuestro caso dan los valores de estas constantes para los ocho primeros términos de la fórmula (I) son: [2]

$$12p_1=\Sigma\, a_m \cos mx \qquad 12q_1=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} mx$$
$$12p_2=\Sigma\, a_m \cos m(2x) \qquad 12q_2=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} m(2x)$$
$$12p_3=\Sigma\, a_m \cos m(3x) \qquad 12q_3=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} m(3x)$$
$$12p_4=\Sigma\, a_m \cos m(4x) \qquad 12q_4=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} m(4x)$$

El signo Σ indica que la cantidad a que afecta se ha de desarrollar en una serie de términos de su misma forma, que se suceden según la serie de los números naturales 0, 1, 2, etc., así que escribiremos:

$$\Sigma\, a_m \cos mx=a_0 \cos 0+a_1 \cos x+a_2 \cos 2x+a_3 \cos 3x+\ldots\ldots$$

x representa el valor de una de las partes en que está dividido el círculo de referencia de la primera curva elemental. Como el período de esta curva es de veinticuatro horas, su círculo de referencia está dividido en 24 partes, y por tanto $x=15°$. Los períodos de las otras curvas son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ del de la primera; por consiguiente las divisiones de sus respectivos círculos de referencia valen

$$2x;\ 3x;\ 4x;\ \text{o}\ 30°;\ 45°;\ 60°;$$

a_m representa los valores de la Tabla III correspondientes a las distintas horas; así en Enero, por ejemplo—

$$a_0=46,\ a_1=17,\ a_2=-20,\ \text{etc.}$$

Según esto, para la determinación de p_1 en Enero, tendremos—

$$12p_1=46 \cos 0+17 \cos 15°-20 \cos 30°-45 \cos 45°\ldots\ldots$$

Sólo falta hallar en las tablas trigonométricas naturales el valor de estos cosenos, y ejecutar las operaciones indicadas. El trabajo, que sería ímprobo si se hubiera de hacer la multiplicación en cada término, puede simplificarse mucho del modo siguiente:

---

[1] Tipografia della Pace di Filipo Cuggiani, Roma, Via della Pace num. 35.

[2] Al fin de este trabajo daremos la prueba matemática de estas ecuaciones.

El valor de los cosenos en las distintas horas es:

0^h	$\cos 0° = 1$	12^h	$= -1$
1	$\cos 15° = .966$	13	$= -.966$
2	$\cos 30° = .866$	14	$= -.866$
3	$\cos 45° = .707$	15	$= -.707$
4	$\cos 60° = .5$	16	$= -.5$
5	$\cos 75° = .259$	17	$= -.259$
6	$\cos 90° = 0$	18	$= 0$
7	$\cos 105° = -\cos 75° = -.259$	19	$= .259$
8	$\cos 120° = -\cos 60° = -.5$	20	$= .5$
9	$= -.707$	21	$= .707$
10	$= -.866$	22	$= .866$
11	$= -.966$	23	$= .966$

Cada uno de estos números aparece como factor común de varias horas. Tendremos por tanto:

$$12\, p_1 = (0-12)\,1 + (1-11-13+23).966 + (2-10-14+22).866$$
$$+ (3-9-15+21).707 + (4-8-16+20).5 + (5-7-17+19).259$$

Sustituyendo en vez de las horas que aparecen en los paréntesis, los valores correspondientes tomados de la Tabla III tenemos por fin:

$$12\, p_1 = (46-15)\,1 + (17-79+63+59).966 + \ldots\ldots$$

Para la determinación de q_1 obtenemos por el mismo procedimiento:

0^h	$\text{sen } 0° = 0$	12^h	$= 0$
1	$\text{sen } 15° = .259$	13	$= -.259$
2	$\text{sen } 30° = .5$	14	$= -.5$
3	$\text{sen } 45° = .707$	15	$= -.707$
4	$\text{sen } 60° = .866$	16	$= -.866$
5	$\text{sen } 75° = .966$	17	$= -.966$
6	$\text{sen } 90° = 1$	18	$= -1$
7	$\text{sen } 105° = \text{sen } 75° = .966$	19	$= -.966$
8	$= .866$	20	$= -.866$
9	$= .707$	21	$= -.707$
10	$= .5$	22	$= -.5$
11	$= .259$	23	$= -.259$

Teniendo en cuenta los factores comunes de varias horas, escribiremos:

$$12\, q_1 = (1+11-13-23).259 + (2+10-14-22).5 + (3+9-15-21).707$$
$$+ (4+8-16-20).866 + (5+7-17-19).966 + (6-18)\,1$$

y sustituyendo en vez de las horas sus valores queda determinada q_1.

Para la determinación de p_2 y q_2 procedemos del mismo modo, teniendo en cuenta que las divisiones del círculo de referencia valen 30°; diremos pues:

p_2

0^h	$\cos 0° = 1$	12^h	$= 1$
1	$\cos 30° = .866$	13	$= .866$
2	$\cos 60° = .5$	14	$= .5$
3	$\cos 90° = 0$	15	$= 0$
4	$\cos 120° = -\cos 60° = -.5$	16	$= -.5$
5	$\cos 150° = -\cos 30° = -.866$	17	$= -.866$
6	$= -1$	18	$= -1$
7	$= -.866$	19	$= -.866$
8	$= -.5$	20	$= -.5$
9	$= 0$	21	$= 0$
10	$= .5$	22	$= .5$
11	$= .866$	23	$= .866$

$$12\,p_2 = (0-6+12-18)\,1+(1-5-7+11+13-17-19+23).866$$
$$+(2-4-8+10+14-16-20+22).5$$

q_2

0^h .... sen $0° =$	0	12^h .... $=$	0
1 .... sen $30° =$	$.5$	13 .... $=$	$.5$
2 .... sen $60° =$	$.866$	14 .... $=$	$.866$
3 .... sen $90° =$	1	15 .... $=$	1
4 .... sen $120° =$ sen $60° =$	$.866$	16 .... $=$	$.866$
5 .... $=$	$.5$	17 .... $=$	$.5$
6 .... $=$	0	18 .... $=$	0
7 .... $=$	$-.5$	19 .... $=$	$-.5$
8 .... $=$	$-.866$	20 .... $=$	$-.866$
9 .... $=$	-1	21 .... $=$	-1
10 .... $=$	$-.866$	22 .... $=$	$-.866$
11 .... $=$	$-.5$	23 .... $=$	$-.5$

$$12\,q_2 = (1+5-7-11+13+17-19-23).5+(2+4-8-10+14$$
$$+16-20-22).866+(3-9+15-21)\,1$$

El círculo de referencia de la tercera curva está dividido de 45° en 45°; por consiguiente:

p_3

0^h .... cos $0° =$	1	12^h .... $=$	-1
1 .... cos $45° =$	$.707$	13 .... $=$	$-.707$
2 .... cos $90° =$	0	14 .... $=$	0
3 .... cos $135° = -$cos $45° =$	$-.707$	15 .... $=$	$.707$
4 .... $=$	-1	16 .... $=$	1
5 .... $=$	$-.707$	17 .... $=$	$.707$
6 .... $=$	0	18 .... $=$	0
7 .... $=$	$.707$	19 .... $=$	$-.707$
8 .... $=$	1	20 .... $=$	-1
9 .... $=$	$.707$	21 .... $=$	$-.707$
10 .... $=$	0	22 .... $=$	0
11 .... $=$	$-.707$	23 .... $=$	$.707$

$$12\,p_3 = (0-4+8-12+16-20)\,1+(1-3-5+7+9-11-13+15+17-19-21+23).707$$

q_3

0^h .... sen $0° =$	0	12^h .... $=$	0
1 .... sen $45° =$	$.707$	13 .... $=$	$-.707$
2 .... sen $90° =$	1	14 .... $=$	-1
3 .... sen $135° =$ sen $45° =$	$.707$	15 .... $=$	$-.707$
4 .... $=$	0	16 .... $=$	0
5 .... $=$	$-.707$	17 .... $=$	$.707$
6 .... $=$	-1	18 .... $=$	1
7 .... $=$	$-.707$	19 .... $=$	$.707$
8 .... $=$	0	20 .... $=$	0
9 .... $=$	$.707$	21 .... $=$	$-.707$
10 .... $=$	1	22 .... $=$	-1
11 .... $=$	$.707$	23 .... $=$	$-.707$

$$12\,q_3 = (1+3-5-7+9+11-13-15+17+19-21-23).707+(2-6+10-14+18-22)\,1$$

Las divisiones del círculo de referencia de la cuarta curva valen 60°; tendremos pues:

p_4

0^h	cos 0° = 1	12^h	= 1
1	cos 60° = .5	13	= .5
2	cos 120° = − cos 60° = − .5	14	= − .5
3	= −1	15	= −1
4	= − .5	16	= − .5
5	= .5	17	= .5
6	= 1	18	= 1
7	= .5	19	= .5
8	= − .5	20	= − .5
9	= −1	21	= −1
10	= − .5	22	= − .5
11	= .5	23	= .5

$$12\ p_4 = (0-3+6-9+12-15+18-21)\,1 + (1-2-4+5+7-8-10$$
$$+11+13-14-16+17+19-20-22+23)\,.5$$

q_4

0^h	sen 0° = 0	12^h	= 0
1	sen 60° = .866	13	= .866
2	sen 120° = sen 60° = .866	14	= .866
3	= 0	15	= 0
4	= − .866	16	= − .866
5	= − .866	17	= − .866
6	= 0	18	= 0
7	= .866	19	= .866
8	= .866	20	= .866
9	= 0	21	= 0
10	= − .866	22	= − .866
11	= − .866	23	= − .866

$$12\ q_4 = (1+2-4-5+7+8-10-11+13+14-16-17+19+20-22-23)\,.866$$

Hemos descendido a tantos pormenores porque pretendemos hacer ver que las tablas del P. Dechevrens, para la determinación de estos coeficientes, son de entera confianza, por estar fundadas en el método mismo de Bessel, y tienen la ventaja de dar verificadas ya las operaciones más expuestas a errores. Las fórmulas que da el P. Dechevrens son:

$$\mathrm{I}\begin{cases} p_1 = (0-12).083 + (1+23-11-13).08 + (2+22-10-14).072 + (3+21-9-15).059 \\ \qquad + (4+20-8-16).042 + (5+19-7-17).022 \\ q_1 = (6-18).083 + (1+11-13-23).022 + (2+10-14-22).042 + (3+9-15-21).059 \\ \qquad + (4+8-16-20).072 + (5+7-17-19).08 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} p_2 = (0+12-6-18).083 + (1+11+13+23-5-7-17-19).072 + (2+10+14 \\ \qquad +22-4-8-16-20).042 \\ q_2 = (3+15-9-21).083 + (1+5+13+17-7-11-19-23).042 + (2+4 \\ \qquad +14+16-8-10-20-22).072 \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\begin{cases} p_3 = (0+8+16-4-12-20).083 + (1+7+9+15+17 \\ \qquad +23-3-5-11-13-19-21).059 \\ q_3 = (2+10+18-6-14-22).083 + (1+3+9+11+17 \\ \qquad +19-5-7-13-15-21-23).059 \end{cases}$$

$$\mathrm{IV}\begin{cases} p_4 = (0+6+12+18-3-9-15-21).083 + (1+5+7+11+13+17+19+23-2 \\ \qquad -4-8-10-14-16-20-22).042 \\ q_4 = (1+2+7+8+13+14+19+20-4-5-10-11-16-17-22-23).072 \end{cases}$$

Comparándolas con las halladas por el método de Bessel, vemos que son idénticas; los coeficientes de los paréntesis son los mismos de Bessel divididos por 12.

Por medio de estas tablas determinamos las constantes que forman la Tabla IV.

Con estas constantes se pasa a determinar los coeficientes armónicos, por medio de las fórmulas que, según antes vimos, los relacionan; damos a continuación las que hemos empleado, y el procedimiento que hemos seguido en el cálculo.

$$\frac{p}{q} = \operatorname{tg} U \therefore \log p - \log q = \log \operatorname{tg} U$$

$$u = \frac{p}{\sin U} \therefore \log u = \log p - \log \sin U$$

En el ejemplo que estamos resolviendo para Enero tendremos, según esto:

$$\begin{aligned}
\log p_1 &= \bar{1}.127429 \\
\log q_1 &= \bar{1}.738463 \\
\hline
\log p_1 - \log q_1 &= \bar{1}.388966 = \log \operatorname{tg} U_1 \therefore U_1 = 13^\circ\ 45'\ 37'' \\
\log p_1 &= \bar{1}.127429 \\
\log \sin U_1 &= \bar{1}.376320 \\
\hline
\log p_1 - \log \sin U_1 &= \bar{1}.751109 = \log u_1 \therefore u_1 = 0.5638
\end{aligned}$$

Hay que tener presente en qué cuadrante se halla U. Puede seguirse esta regla, para averiguarlo fácilmente.

Si p y q son positivas, U pertenece al primer cuadrante; si p es positiva, y q negativa, al segundo; si ambas son negativas, al tercero; finalmente, si p es negativa, y q positiva, al cuarto.

Así, en este mismo mes, al determinar U_2 se hallará directamente en las tablas trigonométricas el ángulo 15° 23′; pero como p_2 es positiva, y q_2 negativa, hay que reducirle al segundo cuadrante, lo que da

$$U_2 = 164^\circ\ 37'$$

De este modo se han ido deduciendo para cada mes los valores de u y U, que damos en la Tabla V.

Aunque en rigor basta este cálculo para discutir las curvas elementales, nos ha parecido calcular por separado para cada mes estas cuatro curvas.

Los valores de las ordenadas correspondientes a cada hora, juntamente con los de la resultante, aparecen en la Tabla VI, en la que hemos añadido la última columna con las diferencias entre la variación resultante calculada y la observada. Lo insignificante de estas diferencias nos parece una buena comprobación de los cálculos.

Una vez calculadas estas ondas, juzgamos no carecería de interés añadir las 12 láminas, en cada una de las cuales aparecen las curvas armónicas elementales de un mes con su resultante. Así se podrá apreciar, más fácilmente que por los valores de las tablas, la importancia de cada una de las curvas. En ellas se ve claramente por qué basta calcular los cuatro primeros términos de la fórmula; la serie es rápidamente convergente, de modo que la cuarta sinusoide se confunde casi con una recta.

Aunque, para la verificación de estos últimos cálculos, da también tablas de P. Dechevrens, juzgamos que sería, si no más fácil, mucho más breve calcular por el método natural.

Por vía de ejemplo, vamos a calcular las cuatro componentes de Enero. La expresión general de las ordenadas de la componente de veinticuatro horas es

$$u \operatorname{sen} (U_1 + x)$$

por consiguiente, en nuestro caso, tendremos como expresión general

$$0.564 \operatorname{sen} (13^\circ\ 46' + x)$$

Para determinar en las distintas horas el águlo expresado por el paréntesis, basta recordar que, en esta primera onda, el punto que recorre el círculo de referencia, ha

descrito un arco de 15° al fin de la primera hora, 30° al fin de la segunda; 45° al fin de la tercera, etc., de modo que se obtendrá para las distintas horas:

0^h .... sen 13° 46′= .238		7^h .. sen 118° 46′=	sen 61° 14′= .877
1 .... sen 28° 46′= .481		8 .. sen 133° 46′=	sen 46° 14′= .722
2 .... sen 43° 46′= .692		9 .. sen 148° 46′=	sen 31° 14′= .519
3 .... sen 58° 46′= .855		10 .. sen 163° 46′=	sen 16° 14′= .280
4 .... sen 73° 46′= .960		11 .. sen 178° 46′=	sen 1° 14′= .022
5 .... sen 88° 46′=1		12 .. sen 193° 46′=	−sen 13° 46′= −.238
6 ..... sen 103° 46′=	sen 76° 14′= .971	....	

De las 12^h en adelante se van repitiendo los valores en el mismo orden, pero con signo contrario. Basta ahora multiplicar cada una de las funciones naturales, que aparecen en último miembro, por el coeficiente 0.564, para obtener los valores que representan las distintas ordenadas de esta onda.

Segunda onda.—La expresión general es:

$$u_2 \text{ sen } (U_2+2x)$$

que en nuestro caso se reduce a

$$0.978 \text{ sen } (164° \ 37'+2x)$$

El elemento variable $2x$ aumenta en 30° cada hora; por tanto

0^h ...... sen 164° 37′= sen 15° 23′= .265	4^h .... sen 284° 37′= −sen 75° 23′= −.968
1 ...... sen 194° 37′= −sen 14° 37′= −.252	5 ..... sen 314° 37′= −sen 45° 23′= −.712
2 ...... sen 224° 37′= −sen 44° 37′= −.702	6 ...... sen 344° 37′= −sen 15° 23′= −.265
3 ...... sen 254° 37′= −sen 74° 37′= −.964	....

Desde las 6^h comienzan a repetirse los valores, pero con signo contrario; de modo que, para obtener las ordenadas de esta curva, basta multiplicar estos valores por 0.978, e ir repitiendo esta serie de productos hasta la hora 23, teniendo cuidado de cambiar de signo en cada repetición.

Las dos ondas restantes se obtienen por análogo procedimiento teniendo en cuenta el valor del elemento variable en cada una.

Tercera onda.	*Cuarta onda.*
0^h .... sen 11° 1′= .191	0^h .. sen 130° 17′= −sen 49° 43′= −.763
1 .... sen 56° 1′= .829	1 ... sen 190° 17′= −sen 10° 17′= −.179
2 ...... sen 101° 1′= sen 78° 59′= .982	2 ... sen 250° 17′= −sen 70° 17′= −.941
3 ...... sen 146° 1′= sen 33° 59′= .559	3 ... sen 310° 17′= −sen 49° 43′= −.763
4 ...... sen 191° 1′= −sen 11° 1′= −.191	....
....	

Este es el modo natural de proceder en el cálculo; en realidad es mucho más sencillo, si nos fijamos en que los ángulos van siendo complementarios de los precedentes, desde las 6^h en la primera onda; desde las 3^h en la segunda, y desde las 2^h en la tercera. De modo que basta determinar los ángulos hasta las 5^h inclusive en la primera onda; hasta las 2^h en la segunda, y hasta la 1^h en la tercera, y sin cuidarse de los restantes, tomar a la vez, en las tablas de las funciones trigonométricas naturales, el valor del seno de cada uno de estos ángulos, y el de su complementario, que se encuentra al extremo de la misma línea. Por ejemplo, para la hora *cero,* en la primera onda de Enero, hallamos el valor del seno de 13° 46′, que es 0.238, y al otro extremo de la misma línea, encontramos el valor 0.971 correspondiente al seno de su complementario 76° 14′, que escribiremos al frente de la hora 6.

Por medio de las tablas del P. Dechevrens, para hallar la ordenada correspondiente a las 0^h de Enero, por ejemplo, hay que aplicar la siguiente fórmula:

$$(0-12).083+(1-13).08+(2-14).072+(3-15).059+(4-16).042+(5-17).022$$
$$+(7-19)\times-.022+(8-20)\times-.042+(9-21)$$
$$\times-.059+(10-22)\times-.072+(11-23)\times-.08$$

sustituir en vez de las horas que aparecen en los paréntesis, sus valores, y ejecutar las operaciones indicadas. En nuestro caso, hechas ya las restas indicadas en los paréntesis, tendríamos

$$.31\times.083+.8\times.08+1.05\times.072+1.1\times.059+1.04\times042$$
$$+.89\times.022-.84\times.022-.87\times.042-.79\times.059-.58\times.072-.2\times.08=0.1341$$

Por el método natural, una vez hallados los valores de las líneas trigonométricas, obtenemos el mismo resultado con una sola multiplicación:

$$0.238\times0.564=0.1342$$

Claro está que el método del P. Dechevrens es menos expuesto a errores, por reducirse a sencillas operaciones aritméticas; pero creemos que basta alguna práctica en el cálculo trigonométrico, para ganar tiempo por el método natural.

Épocas de las fases críticas (máximos y mínimos).—La determinación de las épocas de las fases críticas no ofrece dificultad. Teniendo presente que una ordenada cualquiera tiene por expresión

$$u \text{ sen } (U+x)$$

la condición necesaria y suficiente, para que este valor sea máximo, es que el seno que aparece en la expresión general, valga la unidad, lo que deja finalmente como condición para el máximo.

$$U+x=90^\circ \text{ ó } 450^\circ$$

según que U sea menor o mayor que 90°. Esto supuesto, recordemos que el elemento variable x tiene por valores para las horas sucesivas 0, 1, 2, 3, ... h, en la primera curva; 0°, 15°, $2\times15°$, $3\times15°$, ... $h\times15°$, del mismo modo en la segunda, tercera y cuarta tiene respectivamente por valor para una hora cualquiera h, las expresiones $h\times30°$, $h\times45°$, $h\times60°$. Según esto, vamos a determinar las épocas del primer máximo para las cuatro curvas de Enero.

Para la primera tenemos como condición:

$$13^\circ\ 46'+h\times15^\circ=90^\circ \therefore h=\frac{90^\circ-13^\circ\ 46'}{15}=\frac{76^\circ\ 14'}{15}=5^{h}\ 5^{m}$$

para la segunda:

$$164^\circ\ 37'+h\times30^\circ=450^\circ \therefore h=\frac{450^\circ-164^\circ\ 37'}{30}=9^{h}\ 31^{m}$$

para la tercera:

$$11^\circ\ 1'+h\times45^\circ=90^\circ \therefore h=1^{h}\ 46^{m}$$

cuarta:

$$130^\circ\ 17'+h\times60^\circ=450^\circ \therefore h=5^{h}\ 20^{m}$$

Una vez determinada la época del primer máximo, quedan determinadas las restantes, por distar entre sí doce horas en la primera curva, seis en la segunda, cuatro en la tercera, y tres en la cuarta. Las épocas del primer máximo, para las cuatro curvas en los distintos meses, aparecen en la siguiente tabla:

Época del primer máximo.

Meses.	Primera onda.	Segunda onda.	Tercera onda.	Cuarta onda.	Meses.	Primera onda.	Segunda onda.	Tercera onda.	Cuarta onda.
	H. m.	*H. m.*	*H. m.*	*H. m.*		*H. m.*	*H. m.*	*H. m.*	*H. m.*
Enero	5 5	9 31	1 46	5 20	Julio	2 57	9 52	6 27	5 32
Febrero	5 47	9 41	1 44	5 24	Agosto	3 9	9 51	6 52	4 49
Marzo	5 23	9 45	1 10	5 37	Septiembre	3 25	9 41	1 23	4 38
Abril	5 3	9 44	0 49	5 38	Octubre	4 16	9 30	1 11	4 42
Mayo	4 10	9 44	7 15	5 59	Noviembre	4 20	9 25	1 19	4 42
Junio	3 11	9 49	6 20	0 0	Diciembre	4 26	9 26	1 40	4 46

DISCUSIÓN.

En lo que precede, hemos resuelto la oscilación diurna de la presión en Manila en una serie de oscilaciones armónicas simples, las dos primeras de las cuales, de períodos de veinticuatro y doce horas, son mas importantes sin comparación que las de períodos de ocho y seis horas; de modo que los principales caracteres de la oscilación diurna de la presión, están representados casi exclusivamente por las dos primeras.

Pero este análisis de las curvas no es de suyo otra cosa que un artificio de cálculo; toda curva periódica puede someterse a él. Por lo tanto, las curvas armónicas componentes pudieran tener una significación puramente matemática, sin corresponder a nada real.

Helmholtz al tratar de esta clase de análisis dice: "No es más que una ficción matemática, admirable por lo que facilita el cálculo, pero no guarda relación necesaria con algo real." Sin embargo, hablando en general, no puede negarse la utilidad práctica de este análisis.

Un fenómeno periódico no puede resultar sino de causas periódicas, y de períodos submúltiplos del período del fenómeno; de lo contrario, la periodicidad de este quedaría perturbada. Por medio de este ánalisis, se descompone la curva en las *únicas* elementales, que son posibles, de períodos submúltiplos del suyo; por tanto, es sumamente probable que las causas parciales que influyen en el fenómeno aparezcan, o totalmente, o en sus caracteres principales, en la manera de variar de las curvas elementales. Si deseáramos averiguar si dos fenómenos están, o no, relacionados entre sí, el estudio de las armónicas características de ambos, y especialmente su modo de variar durante el año, es el único procedimiento por donde podemos llegar a cerciorarnos de si existe, o no, esa relación; el que en las curvas que los representan no aparezcan rastros de relación mutua, no nos dice mucho; pues la influencia que el uno pudiera tener en el otro, puede fácilmente estar contrarrestada por otras causas que influyan a la vez.

Aunque de la comparación de dos fenómenos por medio de este análisis no sacáramos más que la persuasión de que no están relacionados entre sí, bien se ve que no se podría dar por perdido nuestro trabajo.

Viniendo al caso particular del barómetro, vamos a traducir lo que el Dr. Hann siente de este estudio:[1]

> Por mi parte, estaba persuadido de que todos los esfuerzos que se hicieran para explicar la oscilación diurna del barómetro por medio de las variaciones diarias de los elementos meteorológicos en una región cualquiera, como lo intentaron Kreil, Blanford, Renou y otros, no podía llevar a conclusión alguna; he publicado una serie de escritos, en los que doy una descripción precisa del fenómeno según se manifiesta en toda la tierra, lo mismo al nivel del mar que a todas las alturas para las que existen observaciones, y me he esforzado en presentar los resultados en una forma tal, que pudiera servir de base a una teoria físico-matemática. Con este objeto, he representado todos los resultados de las observaciones por funciones periódicas, y he calculado las amplitudes y épocas de las fases de las ondas individuales, con sus períodos propios, las cuales, al combinarse, producen el resultado complejo de la curva barométrica diaria, tal como se nos presenta a la observación directa * * * Este es el único medio con que nos ha sido posible hacer progresos notables en la comprensión y explicación del fenómeno.

Lo que principalmente nos proponemos en este trabajo es comparar los resultados obtenidos para Manila con los que se han obtenido para otras regiones; seguiremos pues en la discusión una forma tal, que se preste a esta comparación.

Primera onda.—Uno de los hechos más fundamentales que se establecen en meteorología es, que las capas inferiores de la atmósfera reciben su calor de la superficie terrestre por conducción, y lo transmiten luego por convección a las inmediatas. Este movimiento de convección es principalmente ascendente; el aire se expansiona lateralmente en la alta

[1] "Further contributions to the foundation of a theory of the daily barometric oscillation." Q. Journal of the Meteorological Society. London, 1899, p. 40.

atmósfera, y determina en consecuencia un descenso en el barómetro. Lo contrario sucede con el enfriamiento de la superficie terrestre; el aire en contacto con ella se enfría, y contrae, dando lugar a corrientes descendentes y ascenso en el barómetro. Por lo tanto, en virtud de esta variación de temperatura, han de producirse en la presión atmosférica un máximo y un mínimo, hacia las horas del mínimo y del máximo de temperatura.

El cambio de calor entre la superficie terrestre y las capas inferiores de la atmósfera es de carácter periódico, siendo su principal período de veinticuatro horas. Decimos su *principal* período, porque esta variación no es simplemente armónica; de modo que si se analizara por separado, no quedaría representada por un sencillo movimiento armónico, sino que, además de una componente fundamental de período de veinticuatro horas, resultarían otras menos importantes de períodos de doce, ocho, seis, ... horas.

La primera onda en el análisis de la curva barométrica es de período de veinticuatro horas, y presenta invariablemente el máximo y el mínimo hacia las horas de mínima y máxima temperatura. Este carácter general de la curva hace ya sospechar, que representa el carácter *principal* de la variación de presión, causada por el cambio de calor entre la superficie terrestre y las capas inferiores de la atmósfera.

Tanto la amplitud como las épocas de las fases críticas de esta onda presentan en Manila caracteres especiales, que no podemos menos de hacer notar. La amplitud es menor, y la época del máximo ocurre más temprano que en la mayor parte de las estaciones, en las que se ha verificado este análisis. Hann hizo notar estas mismas propiedades para Mauricio (isla) Singapore y Batavia, en su publicación "Untersuchungen über den Täglichen Gang des Barometers."

Mr. Eliot incluye estas tres estaciones en la tabla siguiente, que copiamos del t.X de "Indian Meteorological Memoirs," p. 73, con varias de las estudiadas por él en la India, para comparar con ellas a Trivandrum, única estación de la India que presenta estos caracteres. A estas cuatro estaciones puede añadirse Manila como aparecerá por los valores de la tabla.

Estación.	Latitud norte.	Valor medio anual de la amplitud u_1.	Época del máximo.	Valor medio anual de la fase inicial U_1.	Estación.	Latitud norte.	Valor medio anual de la amplitud u_1.	Época del máximo.	Valor medio anual de la fase inicial U_1.
	° ′		*H. m.*	° ′		° ′		*H. m.*	° ′
Trivandrum	8 31	0.413	4 36	21 2	Allahabad	25 26	0.774	7 38	335 33
Madras	13 4	.595	6 1	359 38	Magpur	21 9	.767	7 4	343 52
Bombay	18 54	.472	7 56	330 53	Lahore	31 34	.667	8 32	322 2
Rangoon	16 46	.685	6 20	355 3	Mauricio	20 6S	.310	2 54	46 35
Chittagong	22 21	.582	6 50	347 45	Singapore	1 17	.531	4 18	25 35
Calcuta (Alipore)	22 32	.667	6 56	346 5	Batavia	6 11S	.626	4 19	25 17
Kurrachee	24 47	.497	7 5	343 49	**Manila**	14 35	.544	4 15	25 58
Aden	12 45	.779	7 26	338 24					

Mr. Eliot termina la discusión de esta onda con las siguientes palabras:

La primera componente de la oscilación diurna en Trivandrum presenta, por tanto, propiedades características que difieren grandemente de las otras estaciones de la India, pero que se asemejan de una manera notable a las de Batavia y Singapore, y también (aunque no tanto) a Mauricio. Los principales caracteres son: su pequeña amplitud, y la temprana época del máximo. Esto probablemente se debe en gran parte, sino del todo, a su posición marítima y su baja latitud.

Esta semejanza, que hace notar Mr. Eliot entre Trivandrum, Batavia y Singapore, aparece mucho más marcada en Manila, tanto en la amplitud, como en la fase inicial y época del máximo; es pues Manila una confirmación más de estas propiedades que se sospechan para estaciones costeras de baja latitud.

Variación anual de u_1.—La variación anual de u_1 y la variación anual de la absorción del calor en las capas inferiores de la atmósfera guardan entre sí relación de causa a

efecto, como lo han hecho notar Hann ("Untersuchungen, etc.") y Angot ("Annales du Bureau central Meteorologique de France," 1887, p. B. 297), y puede verse confirmado en los trabajos de Mr. Eliot ("Indian Meteorological Memoirs," vol. XII, p. 347).

Breves consideraciones harán ver que se verifica lo mismo en Manila. Como puede verse en la Climatología publicada por el P. Coronas en el t. II de "El Archipiélago Filipino," los meses de Febrero, Marzo y Abril son los más secos, y de nubosidad mínima; Julio, Agosto y Septiembre por el contrario, son los más lluviosos, y de nubosidad máxima. Las circunstancias pues, son sumamente favorables en los tres primeros meses para la absorción del calor en las capas inferiores de la atmósfera, y desfavorables en los tres últimos, por interceptar la gran cantidad de nubes buena parte de la energía calorífica, y por haberse de convertir parte de la que llega a la superficie terrestre en calor latente de evaporación.

Una ojeada a los valores de u_1, hace ver que los tres meses en que alcanza sus valores máximos son Febrero, Marzo y Abril, en los que la absorción de la energía calorífica en las capas inferiores de la atmósfera ha de ser máxima; y llega a sus valores mínimos en Julio, Agosto y Septiembre, época en que la absorción es mínima.

Mr. Eliot hace notar en las publicaciones antes citadas, que en el tránsito de la estación lluviosa a la estación seca suele verificarse un máximo relativo en los valores de u_1. Este máximo relativo aparece efectivamente en Manila en Octubre, mes que puede considerarse como divisorio entre las dos estaciones.

Segunda onda.—Dos son los caracteres que principalmente llaman la atención en esta onda; primero, ser notablemente más importante que las otras tres en todos los meses, y en todas las regiones para las que se ha verificado este análisis; segundo, la constancia en la época de sus fases críticas.

Véanse en el siguiente cuadro las épocas del primer máximo halladas por Mr. Eliot para varias estaciones de la India:

Latitud Norte.	Estación.	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.	Julio.	Agosto.	Septiembre.	Octubre.	Noviembre.	Diciembre.
° ′		H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.	H. m.
8 31	Trivandrum	9 30	9 38	9 34	9 36	9 37	9 42	9 47	9 41	9 29	9 16	9 14	9 22
10 50	Trichinopoly	9 50	9 59	9 59	9 58	9 52	9 52	9 53	9 53	9 48	9 38	9 39	9 47
13 4	Madras	9 45	9 52	9 50	9 49	9 48	9 53	9 57	9 53	9 39	9 28	9 27	9 33
18 54	Bombay	9 43	9 51	9 53	9 54	9 54	10 2	10 6	9 57	9 45	9 25	9 23	9 36
24 47	Kurrachee	9 41	9 58	9 58	9 57	9 58	10 10	10 9	9 51	9 49	9 28	9 29	9 35
34 10	Leh	9 48	10 3	10 6	9 58	9 52	9 50	9 58	10 22	9 47	9 49	9 49	9 49
Valor medio para la India Tropical		9 42	9 53	9 50	9 47	9 47	9 54	9 58	9 55	9 41	9 29	9 28	9 36
14 35	**Manila**	9 31	9 41	9 45	9 44	9 44	9 49	9 52	9 51	9 41	9 30	9 25	9 26

Esta onda es, por su doble oscilación diurna, la que produce las mareas características del barómetro. Es por tanto de sumo interés averiguar su origen.

Las discusiones en que entran Hann, Angot y Lord Kelvin para averiguar el origen de esta onda, son demasiado largas para que podamos reproducirlas aquí en todos sus detalles. Vamos a intentar resumirlas de la manera más breve y clara que nos sea posible.

El fenómeno, que esté representado por esta onda, ha de tener estas dos propiedades: Primera, influir más que ninguno otro en el barómetro; segunda, ser independiente de circunstancias locales.

Desde luego, no se ve qué otro origen pueda tener la causa de este fenómeno, que la influencia del sol sobre la atmósfera terrestre. Pero no puede deberse, dice Lord Kelvin, a la atracción del sol que origina las mareas, pues en ese caso encontraríamos una influencia mucho mayor de la misma especie, debida a la luna, siendo así que, en realidad la marea barométrica lunar es nula, o apenas perceptible. Parece pues cierto que ha de atribuirse a la variación de la temperatura. Ahora bien; esta variación en las

capas inferiores de la atmósfera está sujeta a todas las variaciones posibles a que dan lugar las circunstancias locales de cada estación, mientras que la acción periódica de los rayos solares que, día tras día se verifica en las capas superiores, ha de producir necesariamente movimientos periódicos de gran regularidad.

Esto explica fácilmente la regularidad de esta onda. Lo que no aparece tan claro es el porqué de su doble oscilación diaria y su notable amplitud. La oscilación de la temperatura en las capas superiores de la atmósfera ha de ser, en su forma general, análoga a la oscilación de la temperatura en las inferiores, pues las causas que la producen son las mismas; la insolación durante el día, y la radiación durante la noche. La primera hace que el máximo se verifique poco después que el sol adquiere su altura máxima; la segunda produce el mínimo poco antes de la salida del sol. ¿Cómo pues esta oscilación térmica, de un solo máximo y un solo mínimo, ha de poder dar origen a la doble oscilación barométrica que estudiamos?

Para solucionar la dificultad, Hann acude al único medio, que como indicamos antes, existe para averiguar la relación que guardan entre sí dos fenómenos. Resuelve la variación diurna de la temperatura en sus componentes armónicas, y halla que, de las dos ondas principales que completan el fenómeno, la primera (de período de veinticuatro horas) aparece constantemente con una amplitud mayor que la segunda (de período de doce horas) inversamente a lo que sucede con la presión. He aquí algunos ejemplos:

	u_1	u_2
Latitud 6° 0′, Pacífico ecuatorial	0°.87	0°.11
Latitud 16° 0′, Pacífico tropical	1°.39	0°.31
Latitud 33° 0′, Pacífico subtropical	0°.97	0°.25
Latitud 48° 12′, Zona templada (Viena)	2°.86	0°.51

A pesar de esta discordancia en las componentes armónicas de los dos fenómenos, Hann no duda en asignar como causa de la doble oscilación diaria del barómetro esta doble oscilación diaria de la temperatura.

Al aparecer esta afirmación del eminente meteorólogo, varios científicos opusieron a su hipótesis estas dos dificultades: Primera, la variación térmica que se analiza es la que se observa en las capas inferiores; la que se trata de estudiar es la de las superiores, y puede dudarse de si la marcha de esta segunda es precisamente del mismo carácter que la primera. Segunda, la doble oscilación diaria de la temperatura es únicamente un resultado del cálculo, una mera ficción matemática, que no puede servir de base a la explicación de un fenómeno real. En realidad no existe variación diaria de temperatura con dos máximos y dos mínimos; y si, a pesar de esto, obtenemos una doble onda para la variación de la temperatura, por empeñarnos en representarla por una serie de senos, los resultados que obtenemos son matemáticamente obligados, y no pueden servir para explicar un fenómeno de observación; la causa de este debe buscarse en algo real y natural.

En cuanto a la primera dificultad, queda resuelta con lo que antes indicamos, acerca de la forma de la variación de la temperatura en las capas superiores; atendiendo a las causas que la producen, ha de ser de la misma forma general que la que observamos en las inferiores.

La solución de la segunda pide alguna mayor explicación. Es sabido que, si una masa limitada de fluido, líquido o gaseoso, entra en oscilaciones simples o pendulares, las amplitudes de estas oscilaciones obedecen a las condiciones propias del fluido (sus dimensiones, temperatura, etc.), de modo que, si la masa del fluido recibe un impulso único, se moverá siempre con aquella clase de ondulaciones, que le son posibles en virtud de sus condiciones propias. Estas son las que suelen denominarse *oscilaciones libres*.

Si el impulso se verifica periódicamente, se fuerza a la masa a entrar en oscilaciones del mismo período que el del impulso, aunque estas nuevas oscilaciones no coincidan con

la forma de oscilación a que pertenecen las ondas libres. Si este impulso periódico no fuera de carácter simplemente armónico—es decir, si no pudiera quedar representado por una simple sinusoide, podría resolverse, por el teorema de Fourier, en sus componentes armónicas de períodos 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., del suyo, de modo que el efecto debido a este impulso sería el mismo que producirían obrando a la vez varios impulsos simplemente armónicos, cada uno de los cuales estuviera representado por una de las componentes armónicas. Nótese bien que está completamente fuera de propósito la cuestión de si se dan, o no, en la práctica esos impulsos componentes; basta que el impulso real pueda considerarse como resultante de ellos.

Si el período de alguno de estos impulsos componentes coincide con el de las oscilaciones libres de la masa del fluido, la oscilación forzada resultante adquiere una amplitud desproporcionalmente grande; de modo que, aunque la amplitud de este impulso sea relativamente pequeña comparada con la de los otros impulsos componentes, el efecto por él producido es mucho mayor; por donde se ve claramente que, si se analizara por medio de la serie de senos la oscilación compleja resultante, la curva armónica correspondiente a las oscilaciones libres sería de gran amplitud, mientras que la correspondiente en el análisis del impulso sería de amplitud pequeña, y no por esto dejaría de ser la segunda, causa de la primera.

Viniendo ahora a nuestro caso: La curva que representa la variación diurna de la temperatura en las capas superiores de la atmósfera, ha de ser necesariamente asimétrica, por serlo sus dos causas, la insolación y radiación, que dependen de la duración del día y de la noche. Si pues, al analizarla, vemos que queda reproducida casi exclusivamente por la combinación de las dos componentes armónicas de períodos de veinticuatro y doce horas, podemos considerar la variación *real* que observamos, como la resultante de dos variaciones armónicas de la temperatura; una de período de veinticuatro horas, y otra de doce; *no importa que no existan de hecho dos causas, que den origen a estas dos variaciones;* basta, para nuestro propósito, que el fenómeno se produzca del mismo modo que si en realidad existieran.

Ahora bien; el Dr. Margules, siguiendo las indicaciones de Lord Kelvin, emprendió el difícil y laborioso trabajo de calcular las oscilaciones que en la atmósfera terrestre ha de causar su calefacción y enfriamiento periódico.[1] En la primera de sus publicaciones probó que el período de oscilación libre de nuestra atmósfera es de doce horas próximamente.

Estos trabajos y conclusiones del Dr. Margules han sido acogidos con entusiasmo, y han dado ocasión a tan interesantes publicaciones como la de Paul Jaerisch "Zur Theorie der hydrodynamischen Gleichungen in sphärischen Koordinaten" (Meteorologische Zeitschrift, 1907, pp. 481–498) ; la de W. Trabert "Die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules, und die tägliche Oszillation der Luftmassen" (Met. Zeit., 1903, pp. 481–501) ; la de W. J. Humphreys "On the diurnal variations of atmospheric pressure" (Bulletin of the Mount Weather Observatory, 1912, vol 5, part 2, pp. 132–156) y la más completa quizá de todas de Horace Lamb "Atmospheric Oscillations" (Proc. Roy. Soc., 1911, vol. 84, pp. 551–572).[2]

[1] "Über die Schwingugen periodisch erwarmter Luft." Sitzungsb. Wien., Akad. Marzo, 1890. "Luftbewegungen in einer rotirenden Spharoidschale." Ibid. Abril, 1890; Enero y Diciembre, 1893. Puede verse una traducción al inglés en "The Mechanics of the Earth's Atmosphere" by Cleveland Abbe. Smithsonian miscellaneous collections—843—pág. 296.

[2] Estando ya en la imprenta nuestro trabajo se ha recibido en este Observatorio una publicación de Prof. Frank H. Bigelow "La termodinámica de la circulación, y la radiación de la atmósfera terrestre" (Boletín de la Oficina Meteorológica Argentina No. 3). En la página 15 propone dos dificultades contra la teoría: (1) Las ondas semidiurnas de presión desaparecen dentro de los 2,000 metros de la superficie; (2) el término de calor (Q_1-Q_0) no estaba incluído en la ecuación general

Resumiendo pues brevemente, podemos explicar la doble oscilación y notable amplitud de la segunda onda del modo siguiente: Al recibir nuestra atmósfera un impulso térmico (si es lícita esta denominación) se produce en ella el mismo efecto que si recibiera simultáneamente dos, que pudieran estar representados por sinusoides de períodos de veinticuatro y doce horas respectivamente. La amplitud o intensidad del segundo es menor que la del primero, pero la oscilación que en la atmósfera causa, ha de ser de gran amplitud, por coincidir su período con el de las oscilaciones libres, propias de nuestra atmósfera; mientras que las oscilaciones producidas por el primero quedan notablemente reducidas, por no coincidir su período con el de las oscilaciones libres.

La hipótesis de que la segunda onda se deba a la absorción y radiación de calor en la alta atmósfera, está confirmada por la comparación de la variación anual de estas, y la de la amplitud u_2. Bastarán a nuestro propósito breves indicaciones.[1]

Uno de los factores más importantes en la influencia que la absorción y radiación pueden tener en los cambios de presión, es la presencia o ausencia de nubes en la atmósfera. La cantidad de calor, que absorbe una atmósfera seca y despejada, se emplea en dilatarla, dando lugar a movimientos ascendentes y laterales, que se traslucen en el barómetro por cambios de presión. Al contrario; la energía calorífica que llega a una atmósfera cargada de nubes, se convierte en gran parte en calor latente de evaporación, lo que no puede afectar en nada a la presión. Por tanto, en la estación seca, los cambios de presión debidos a estas causas serán mayores que en la estación lluviosa, por la notable diferencia de nubosidad entre estas dos estaciones.

La Tabla V hacer ver claramente esta diferencia en los valores, de u_2, que son constantemente mayores en los meses de la estación seca que en los de la lluviosa, y en los que resalta sobre todo la separación perfectamente bien definida de las dos estaciones en el salto de Mayo a Junio que en estos valores se verifica.

Vamos a terminar la discusión de esta onda comparando sus principales caracteres en Manila con los que presenta en las mismas estaciones que comparábamos en la primera onda.

El cuadro que sigue está copiado del Tomo X de "Indian Meteorological Memoirs,"

---

de movimiento empleada por Margules, Jaerisch y Gold. No es la primera vez que Mr. Bigelow impugna esta teoría; véase por ejemplo su publicación "Studies on the diurnal periods in the lower strata of the Atmosphere" (Monthly Weather Review, 1905, p. 93) y el capítulo 9, página 458 de su "Report on the internacional cloud observations," 1898–99. No parece se pueda suponer que científicos como Lord Kelvin y Hann ignoraran que la oscilación semidiurna va disminuyendo con la altura hasta hacerse nula o casi imperceptible; y a pesar de esto no dudaron en establecer su teoría. Deberían pues suponer que la oscilación semidiurna reaparece en la alta atmósfera. Algo de esto parece indicar Mr. Ernest Gold en varios pasajes de su interesante memoria, "The International Kite and Balloon ascents" que obtuvo el primer premio ofrecido en 1908 por la Sociedad Meteorológica Alemana. Para abreviar nos limitaremos a traducir dos líneas de la página 120 "De aquí que cambios de presión en la superficie terrestre van unidos a cambios en dirección opuesta en la estratoesfera, que dan lugar a corrientes entre la estratoesfera y la tropoesfera."

La segunda dificultad pudiera inducir a creer que a los tres eminentes matemáticos que nombra se les había pasado por alto la influencia que el término de calor libre pudiera tener en la ecuación general de movimiento, siendo así que el Dr. Margules después de introducir en la ecuación diferencial de movimiento el término de calor libre termina así: "Para nuestro propósito será más conveniente considerar las variaciones de presión como consecuencia de las variaciones de temperatura, no como consecuencia del flujo variable de calor. Por tanto volvemos a la ecuación (4*a*)"—donde ciertamente ya no entra el término de que habla Mr. Bigelow.

[1] Véase una larga y detallada discusión sobre el particular en el Tomo XII de "Indian Meteorological Memoirs, Calcutta," páginas 328–347.

Pueden consultarse también Langley: "Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere" publicado en el No. 15 de "Professional Papers of the Signal Service," y en el Vol. I de "Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution," Cleveland Abbe "Preparatory Studies for Deductive Methods in Storm and Weather Predictions."

página 74, en el que hemos reducido a milímetros los valores que en el original están dados en pulgadas para facilitar la comparación.

Estación.	Amplitud media u_2.	Fase media U_2.	Época media del máximo.	Relación del máximo al mínimo de u_2.	Mes en que ocurre el máximo.	Mes en que ocurre el mínimo.	Épocas extremas del máximo de u_2. Más temprano.	Épocas extremas del máximo de u_2. Más tarde.	Mes de la época más temprana.	Mes de la época más tardía.
	mm.	° ′	*H. m.*				*H. m.*	*H. m.*		
Trivandrum	1.100	164 14	9 32	1.4	Febrero	Julio	9 14	9 47	Noviembre	Julio.
Madras	1.115	158 5	9 44	1.2	Marzo	id	9 27	9 57	id	Id.
Bombay	.977	156 51	9 46	1.5	Febrero	id	9 15	9 58	id	Id.
Rangoon	1.023	153 3	9 54	1.4	Marzo	id	9 37	10 12	Noviembre Diciembre	Agosto.
Chittagong	.946	148 5	10 4	1.3	Abril	Junio	9 39	10 19	Noviembre	Marzo. Agosto.
Calcutta	1.028	147 50	10 4	1.3	Marzo	Julio	9 41	10 24	id	Julio.
Kurrachee	.797	155 40	9 49	1.6	Febrero	Junio	9 28	10 10	Octubre	Junio.
Aden	.908	159 59	9 40	1.5	Noviembre	id	9 20	9 58	id	Abril.
Allahabad	.918	150 13	9 59	1.2	Marzo	id	9 37	10 17	Noviembre	Agosto.
Magpur	1.010	154 44	9 51	1.4	id	Julio	9 28	10 10	Octubre	Julio.
Lahore	.628	138 18	10 23	1.3	Febrero	id	9 56	10 36	id	Febrero. Julio.
Mauricio	.733	163 44	9 32	1.2	Octubre	id	9 20	9 45	Noviembre	Febrero.
Singapore	.995	156 18	9 47	1.3	Marzo Abril	id	9 31	9 58	id	Julio.
Batavia	.959	159 56	9 40	1.2	Octubre	id	9 25	9 54	id	Febrero.
Manila	.919	160 5	9 40	1.4	Marzo Abril	id	9 25	9 52	Noviembre Diciembre	Julio. Agosto.

Por este cuadro puede apreciarse de un modo general la constancia en los caracteres principales de esta onda en las distintas regiones. Resalta sobre todo la concordancia casi perfecta de la relación entre el máximo y mínimo de la amplitud, y la época del año en que se verifica el mínimo.

Nótanse sin embargo algunas discrepancias, que indican no estar del todo libre esta onda de la influencia de circunstancias locales. Así por ejemplo, en algunas regiones, la amplitud presenta dos máximos y dos mínimos en el año, mientras que en otras, Manila entre ellas, desaparece esta doble variación. En estaciones que, como Batavia, Mauricio y Adden, presentan en Octubre o Noviembre el máximo absoluto, se verifica otro relativo en Marzo o Abril.

La razón de estas variaciones es bastante obvia. La onda segunda, tal como resulta del análisis, ha de ser una onda compleja, resultante de la interferencia de dos, con el mismo período de doce horas. Una de estas (que denominaremos *onda semidiurna principal*) es la producida por las variaciones de temperatura en las capas superiores de la atmósfera, según lo anteriormente explicado; la otra (*onda semidiurna secundaria*) representa las oscilaciones que en la presión ha de producir la componente semidiurna de la temperatura en las capas inferiores. La primera de estas dos presenta, según Hann y Angot, una doble variación durante el año, siendo máxima en los equinoccios, y mínima en los solsticios. La segunda, más irregular y de menor amplitud que la primera, por obedecer a influencias locales, ha de pasar por un solo máximo (en la estación seca) y un solo mínimo (en la lluviosa).

Fácilmente se ve cómo de la interferencia de estas dos ondas puede resultar la desaparición completa, o casi completa, de la doble variación anual en la onda que estudiamos; pues el equinoccio de otoño tiene lugar en la mayor parte de las regiones en la estación lluviosa, y el solsticio de invierno hacia el comienzo de la estación seca, de modo que el máximo y mínimo correspondiente a estas épocas en la onda principal, quedan contrarrestados, o en todo o en gran parte, por coincidir con las épocas de amplitud mínima y máxima de la onda secundaria. Lo contrario sucede con el solsticio de verano y equinoccio de primavera, por coincidir el primero con la estación lluviosa, y el segundo con la seca.

M. Angot, en la publicación ya citada, p. B311 y siguientes, propone un método bas-

tante ingenioso para la separación de estas dos ondas. No juzgamos oportuno detenernos en la explicación de todo el procedimiento, que nos ocuparía demasiado espacio. Nos limitaremos a dar en la tabla de la pág. 25, los resultados que por este medio hemos obtenido para Manila.[1]

No podemos comparar nuestros resultados con los de otras regiones, pues no sabemos que se haya verificado este análisis más que por el mismo Angot, y éste únicamente ha tomado uno o dos meses para las nueve regiones que somete a este cálculo; juzgamos sin embargo útil haber comprobado para Manila este carácter que se atribuye a la onda semidiurna principal.

Tercera onda.—Dos son las únicas hipótesis posibles acerca del orígen de esta onda:

1.ª Que provenga de una acción independiente de período de ocho horas.

2.ª Que sea parte del efecto producido por las causas que originan la primera onda; pues como indicábamos en la discusión de esta, las causas de la primera onda no pueden representarse por un movimiento simplemente armónico.

Lo primero que ocurre contra la primera hipótesis es, que no se conoce acción física independiente de período de ocho horas. A esto se añade que la amplitud de la tercera componente es muy pequeña, lo que dice mejor con el carácter de un residuo, que de un efecto total debido a una causa independiente.

En confirmación de estas razones generales viene la propiedad que en todas las regiones se nota en esta onda; la variación anual de su amplitud, y de la época de sus fases críticas sigue una ley parecida a la primera, con la particularidad de que el sentido de esta variación es casi perfectamente inverso, lo que hace sospechar que la tercera onda es una corrección de los valores de la primera.

Dada la pequeña influencia que, tanto esta onda como la cuarta, han de tener en la variación barométrica, creemos no vale la pena detenerse más en su discusión. No queremos sin embargo omitir una particularidad de la tercera onda que hace notar el Dr. Hann; esto es, que hacia los equinoccios, la época de las fases experimenta una inversión notable, y que esta inversión concuerda exactamente con la época de los mínimos de la amplitud. Esta propiedad aparece bien marcada en Manila; la inversión de que habla el Dr. Hann se verifica de Abril ($0^h\ 49^m$) a Mayo ($7^h\ 15^m$) y de Agosto ($6^h\ 52^m$) a Septiembre ($1^h\ 23^m$); los mínimos en la amplitud se verifican también de Abril a Mayo, y de Agosto a Septiembre, como puede verse en la Tabla V.

---

[1] La fórmula a que finalmente se llega por este método de Angot, es

$$0.^{mm}\ 926\ \frac{h \cos^2 \delta}{760 r^2} \cos^4 \lambda \cos\ (2m + 64^\circ - 2\epsilon)$$

en la que h representa la presión media; δ la declinación del sol; r el radio de la órbita terrestre; λ la latitud del lugar; m las distintas horas expresadas en grados, de modo que será *cero* para las 0^h; 15° para la 1^h; 30° para las 2^h, etc.; ϵ la ecuación del tiempo. Los valores que hemos tomado para estas cantidades son:

$h = 759.10$ $\lambda = 14^\circ\ 35'$

	2ϵ	$\frac{\cos^2 \delta}{r^2}$
Enero	$+4^\circ\ 48'$	0.9033
Febrero	$+7^\circ\ 01'$	0.9722
Marzo	$+4^\circ\ 19'$	1.0043
Abril	$+0^\circ\ 02'$	0.9597
Mayo	$-1^\circ\ 46'$	0.8734
Junio	$+0^\circ\ 08'$	0.8197
Julio	$+2^\circ\ 41'$	0.8424
Agosto	$+1^\circ\ 50'$	0.9208
Septiembre	$-2^\circ\ 32'$	0.9852
Octubre	$-7^\circ\ 00'$	0.9806
Noviembre	$-7^\circ\ 18'$	0.9193
Diciembre	$-1^\circ\ 56'$	0.8746

CONCLUSIÓN.

De todo lo hasta aquí expuesto se deduce, que la teoría moderna de la doble oscilación diaria del barómetro supone ser dos las causas del fenómeno. La una está completamente libre de influencias locales, y es precisamente la que introduce en la curva barométrica esa doble oscilación, siempre tan misteriosa para los que han tratado de investigar su origen. Está representada por la que hemos denominado *onda semidiurna principal,* y es debida a la variación de la temperatura en las capas superiores de la atmósfera. La otra varía según las circunstancias locales de cada región, por deberse a la variación de la temperatura en las capas inferiores. La curva que la representa suele denominarse *onda térmica.* En la tabla de la página 26 damos sus valores para todos los meses; están deducidos restando de la variación observada (Tabla III) la onda semidiurna principal.

En las Láminas XIII y XIV pueden verse las curvas que representan la onda térmica, y la onda semidiurna principal, para varios meses.

Estas son sin duda las dos ondas de que habla M. Angot en su "Traité élémentaire de Météorologie" (p. 104) al explicar la variación diurna del barómetro.

Sin saber de qué ondas se trata no es fácil darse perfecta cuenta de esta explicación. Hemos juzgado pues será de interés traducirla aquí, pues al mismo tiempo que se entenderá mejor teniendo a la vista las curvas, servirá como discusión de estas.

"La variación diurna del bárometro no está aún explicada de una manera completa. Las investigaciones más recientes parecen indicar que resulta de la superposición de dos oscilaciones distintas; una, que presenta dos máximos y dos mínimos por día, cuyo período es, por consiguiente, de medio día, y que se denomina, por esta razón, *oscilación u onda semidiurna;* otra, que presenta un solo máximo y un solo mínimo en veinticuatro horas, y que se denomina *onda diurna.*

"Los dos máximos diarios de la onda semidiurna serán iguales entre sí, lo mismo que los dos mínimos. En toda estación del año, y para toda la tierra, los dos máximos se verificarán hacia las 10^h de la mañana y de la tarde; los dos mínimos hacia las 4^h de la mañana y de la tarde. La diferencia entre los máximos y los mínimos de la onda semidiurna—es decir, la amplitud de esta onda,[1] varía poco, para una misma estación, durante el año; es máxima en los equinoccios, y mínima en los solsticios. Esta amplitud no dependerá de condiciones topográficas, sino únicamente de la latitud—cerca de 2 mm. en el ecuador, disminuye primero lentamente hasta los trópicos, luego muy rápidamente, de modo que llega a ser muy pequeña en latitudes altas. Es probable que esta onda semidiurna esté causada por la acción del calor solar en toda la masa de la atmósfera; pero no se ha podido explicar todavía convenientemente el modo como se produce.

"Mientras que la onda semidiurna es la misma para todas las regiones situadas en la misma latitud, la onda diurna tiene una amplitud muy variable, que depende de las condiciones topográficas de la región, y que puede ser muy diferente aún para estaciones vecinas. En general es mucho más débil en estaciones costeras que en estaciones continentales, y su amplitud está en razón directa de la amplitud de la variación diurna de la temperatura. Las horas del máximo y del mínimo varían notablemente según los países o las estaciones del año; el máximo se verifica más temprano en verano que en invierno; su época media se acerca a las 9^h; el mínimo, al contrario, cuya época media es cerca de las 16^h, se produce más temprano en invierno que en verano. El período de bajada dura pues, por término medio solamente siete horas, mientras que

[1] M. Angot toma aquí como amplitud de la onda, la amplitud de una oscilación completa; otros autores, y el mismo Angot en la publicación que hemos citado varias veces, toma como amplitud de la onda la amplitud de una semioscilación, o la ordenada máxima de la curva.

el período de subida se extiende a diez y siete horas; la subida no es uniforme durante este tiempo; rápida inmediatamente después del mínimo, se detiene durante la noche, y crece de nuevo con más rapidez entre la salida del sol y la hora del máximo.

"Mientras que la teoría de la onda semidiurna no está hallada aún [1] la onda diurna se explica, por el contrario, completamente por el efecto local de la variación diurna de la temperatura. Durante la noche, a medida que se produce el enfriamiento en las capas inferiores de la atmósfera, estas se contraen, y para llenar el vacío que produciría esta contracción, el aire afluye por todos lados, sobre todo por la parte superior; la masa de aire situada sobre la región que se considera se hace por lo tanto mayor, y la presión aumenta. Desde la salida del sol las capas inferiores se calientan rápidamente y tienden a elevarse; pero la calefacción se produce primero en las capas que están en contacto con la superficie terrestre; las capas de aire, comprendidas entre la superficie y las capas superiores que no se calientan aún, no aumentan al principio de volumen de una manera apreciable; lo mismo que sucede cuando se calienta el aire en una cámara cerrada, la elevación de temperatura se manifiesta entonces principalmente por un aumento de presión; el primer efecto de la calefacción diurna es por consiguiente un aumento de presión en las capas que están en contacto con el suelo; el barómetro comienza pues a subir.

"Un poco más tarde entre 7^h y 11^h de la mañana, según los países y las estaciones del año, la calefacción de las capas inferiores es suficiente para determinar por fin un movimiento ascendente general del aire sobre la estación; el aire se dilata; pero desde que la columna de aire situada sobre la región caliente alcanza mayor altura que la que cubre las regiones circunvecinas, el aire se extiende hacia los lados, desde la región más caliente a los meridianos más distantes del sol; la cantidad de aire que insiste sobre la estación disminuye por lo tanto, y el barómetro baja. Hacia el fin del día, cuando la temperatura comienza a disminuir rápidamente en las capas inferiores, la corriente ascendente pierde actividad, cesa y acaba por ser reemplazada durante la noche por un movimiento inverso; el barómetro sube entonces, rápidamente primero mientras la temperatura disminuye con rapidez; después más lentamente hasta la salida del sol."

Nótese que la explicación que de la onda térmica o diurna da M. Angot coincide en gran parte con la primera teoría de la variación diurna del barómetro propuesta por Raimond, y perfeccionada luego por Kreil y Renou, y que era insuficiente cuando se la aplicaba a la variación diurna total de la presión.

Concluyamos pues, que el análisis de las curvas que representan los diversos elementos meteorológicos de cada región, aunque un tanto largo y penoso, puede ser de gran utilidad, tanto para el estudio simultáneo de varios fenómenos, cuyas relaciones mutuas queramos investigar, como para profundizar más en las causas que en cada uno de ellos puedan intervenir.

[1] No sabemos si M. Angot tendría noticia de las investigaciones del Dr. Margules, pues ni aquí ni en el trabajo que publicó en los Anales del Buró Central de Francia, hace mención de ellas, siendo de tan capital importancia en la explicación de esta onda. El Dr. Hann en publicaciones posteriores a las de Angot, se lamenta de que los trabajos del Dr. Margules no sean más conocidos, y de que no hubieran llamado aún la atención de la "Meteorologische Zeitschrift."

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BESSEL, PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LA FÓRMULA (I).

Supongamos que se nos da un número cualquiera n de observaciones.

Representemos por a_0, a_1, a_2, etc., las observaciones correspondientes a las horas 0, 1, 2, etc.

Vimos en la página 43 que estas observaciones están representadas por las ecuaciones siguientes:[1]

$$a_0=p+p_1+p_2+p_3\ldots\ldots$$
$$a_1=p+p_1 \cos x+q_1 \operatorname{sen} x+p_2 \cos 2x+q_2 \operatorname{sen} 2x+p_3 \cos 3x+q_3 \operatorname{sen} 3x+\ldots\ldots$$
$$a_2=p+p_1 \cos 2x+q_1 \operatorname{sen} 2x+p_2 \cos 4x+q_2 \operatorname{sen} 4x+p_3 \cos 6x+q_3 \operatorname{sen} 6x+\ldots\ldots$$
$$a_3=p+p_1 \cos 3x+q_1 \operatorname{sen} 3x+p_2 \cos 6x+q_2 \operatorname{sen} 6x+p_3 \cos 9x+q_3 \operatorname{sen} 9x+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}=p+p_1 \cos (n-1)x+q_1 \operatorname{sen} (n-1)x+p_2 \cos 2(n-1)x+q_2 \operatorname{sen} 2(n-1)x+p_3 \cos 3(n-1)x +q_3 \operatorname{sen} 3(n-1)x+\ldots\ldots$$

Si el número de los coeficientes que pretendemos determinar, fuera el mismo que el de nuestras observaciones, tendríamos un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, y podríamos resolverle fácilmente por los métodos ordinarios del álgebra. Pero ordinariamente el número de las observaciones excede con mucho al número de coeficientes que necesitamos; así, en el análisis de la curva barométrica, teníamos veinticuatro observaciones, y empleábamos únicamente ocho de estos coeficientes.

En este caso el sistema es *más que determinado;* y en la imposibilidad de hallar los valores de p y q que, sustituídos en las ecuaciones, reproduzcan exactamente nuestras observaciones, hemos de contentarnos con averiguar cuáles son los valores más probables de p y q, que dan para los segundos miembros valores compatibles con las observaciones.

En la teoría de los mínimos cuadrados se prueba, que estos valores más probables son *aquellos que hacen mínima la suma de los cuadrados de los errores residuos.*

Error residuo es lo que se aparta del valor observado el valor obtenido al sustituir en las ecuaciones los valores más probables de las incógnitas.

Según esta definición, designando por v_0, v_1, v_2, etc., los errores residuos, y suponiendo que p, p_1, q_1, *etc.*, son los valores más probables de estos coeficientes, podemos escribir:

$$v_0=-a_0+p+p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots$$
$$v_1=-a_1+p+p_1 \cos x+q_1 \operatorname{sen} x+p_2 \cos 2x+q_2 \operatorname{sen} 2x+p_3 \cos 3x+q_3 \operatorname{sen} 3x+\ldots\ldots$$
$$v_2=-a_2+p+p_1 \cos 2x+q_1 \operatorname{sen} 2x+p_2 \cos 4x+q_2 \operatorname{sen} 4x+p_3 \cos 6x+q_3 \operatorname{sen} 6x+\ldots\ldots$$
$$v_3=-a_3+p+p_1 \cos 3x+q_1 \operatorname{sen} 3x+p_2 \cos 6x+q_2 \operatorname{sen} 6x+p_3 \cos 9x+q_3 \operatorname{sen} 9x+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{n-1}=a_{n-1}+p+p_1 \cos (n-1)x+q_1 \operatorname{sen} (n-1)x+p_2 \cos 2(n-1)x+q_2 \operatorname{sen} 2(n-1)x +p_3 \cos 3(n-1)x+q_3 \operatorname{sen} 3(n-1)x+\ldots\ldots$$

La condición que hace más probables los valores de p y q es

$$v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2+\ldots\ldots+v^2{}_{n-1}=\text{mínimo.}$$

y escribiendo en vez de v_0^2, v_1^2, etc., sus valores, queda

$$(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots\ldots)^2+(-a_1+p+p_1 \cos x+q_1 \operatorname{sen} x+\ldots\ldots)^2 +(-a_2+p+p_1 \cos 2x+q_1 \operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)^2=\text{mínimo.}$$

Ahora bien; sabemos por el cálculo diferencial que, *cuando una función está en un mínimo, sus derivadas con respecto a cada una de las variables son cero.* Por consi-

[1] La p, que aparece en estas ecuaciones, representa la constante M que vimos completaba la fórmula de Bessel; nótese además que las ecuaciones de la página 43 están dadas aquí según la Fórmula (I).

guiente, derivando la expresión anterior con respecto a p, p_1, q_1, etc., y representando por P, P_1, Q_1, etc., estas derivadas, obtenemos el sistema siguiente:

$$P=2(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots\ldots)+2(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\operatorname{sen} x+\ldots\ldots)$$
$$+2(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0$$
$$P_1=2(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots\ldots)+2\cos x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\operatorname{sen} x+\ldots\ldots)$$
$$+2\cos 2x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0$$
$$Q_1=2\operatorname{sen} x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\operatorname{sen} x+\ldots\ldots)$$
$$+2\operatorname{sen} 2x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0$$
$$P_2=2(-a_0+p+p_1+p_2+\ldots\ldots)+2\cos 2x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\operatorname{sen} x+\ldots\ldots)$$
$$+2\cos 4x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0$$
$$Q=2\operatorname{sen} 2x(-a_1+p+p_1\cos x+q_1\operatorname{sen} x+\ldots\ldots)$$
$$+2\operatorname{sen} 4x(-a_2+p+p_1\cos 2x+q_1\operatorname{sen} 2x+\ldots\ldots)+\ldots\ldots=0$$

Este es el sistema que hemos de resolver para hallar los valores de p y q, que serán los más probables; pues en esta hipótesis se han obtenido las ecuaciones precedentes.

Después de dividir por 2, podemos darle la siguiente forma:

$$\tfrac{1}{2}P=\begin{array}{l}-a_0\\-a_1\\-a_2\\-a_3\\\vdots\\-a_{n-1}\end{array}+np+p_1\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\\+\cos 2x\\+\cos 3x\\+\cos 4x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\end{array}\right.+q_1\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x\\+\operatorname{sen} 2x\\+\operatorname{sen} 3x\\+\operatorname{sen} 4x\\\vdots\\+\operatorname{sen}(n-1)x\end{array}\right.+p_2\left|\begin{array}{l}1\\+\cos 2x\\+\cos 4x\\+\cos 6x\\+\cos 8x\\\vdots\\+\cos 2(n-1)x\end{array}\right.+q_2\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} 2x\\+\operatorname{sen} 4x\\+\operatorname{sen} 6x\\+\operatorname{sen} 8x\\\vdots\\+\operatorname{sen} 2(n-1)x\end{array}\right.+\ldots\ldots=0$$

$$\tfrac{1}{2}P_1=\begin{array}{l}-a_0\\-a_1\cos x\\-a_2\cos 2x\\-a_3\cos 3x\\\vdots\\-a_{n-1}\cos(n-1)x\end{array}+p\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\\+\cos 2x\\+\cos 3x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\end{array}\right.+p_1\left|\begin{array}{l}1\\+\cos^2 x\\+\cos^2 2x\\+\cos^2 3x\\\vdots\\+\cos^2(n-1)x\end{array}\right.+q_1\left|\begin{array}{l}\cos x\operatorname{sen} x\\+\cos 2x\operatorname{sen} 2x\\+\cos 3x\operatorname{sen} 3x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\operatorname{sen}(n-1)x\end{array}\right.$$
$$+p_2\left|\begin{array}{l}1\\+\cos x\cos 2x\\+\cos 2x\cos 4x\\+\cos 3x\cos 6x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\cos 2(n-1)x\end{array}\right.+q_2\left|\begin{array}{l}\cos x\operatorname{sen} 2x\\+\cos 2x\operatorname{sen} 4x\\+\cos 3x\operatorname{sen} 6x\\\vdots\\+\cos(n-1)x\operatorname{sen} 2(n-1)x\end{array}\right.+\ldots\ldots=0$$

$$\tfrac{1}{2}Q_1=\begin{array}{l}-a_1\operatorname{sen} x\\-a_2\operatorname{sen} 2x\\-a_3\operatorname{sen} 3x\\\vdots\\-a_{n-1}\operatorname{sen}(n-1)x\end{array}+p\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x\\+\operatorname{sen} 2x\\+\operatorname{sen} 3x\\\vdots\\+\operatorname{sen}(n-1)x\end{array}\right.+p_1\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x\cos x\\+\operatorname{sen} 2x\cos 2x\\+\operatorname{sen} 3x\cos 3x\\\vdots\\+\operatorname{sen}(n-1)x\cos(n-1)x\end{array}\right.+q_1\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2 x\\+\operatorname{sen}^2 2x\\+\operatorname{sen}^2 3x\\\vdots\\+\operatorname{sen}^2(n-1)x\end{array}\right.$$
$$+p_2\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x\cos 2x\\+\operatorname{sen} 2x\cos 4x\\+\operatorname{sen} 3x\cos 6x\\\vdots\\+\operatorname{sen}(n-1)x\cos 2(n-1)x\end{array}\right.+q_2\left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\\+\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 4x\\+\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 6x\\\vdots\\+\operatorname{sen}(n-1)x\operatorname{sen} 2(n-1)x\end{array}\right.+\ldots\ldots=0$$

Este sistema según la notación explicada en la página 47, puede escribirse del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}
-\Sigma\, a_m+np+p_1\,\Sigma \cos mx+q_1\,\Sigma \operatorname{sen} mx+p_2\,\Sigma \cos 2mx+q_2\,\Sigma \operatorname{sen} 2mx+\ldots\ldots=0\\
-\Sigma\, a_m \cos mx+p\,\Sigma \cos mx+p_1\,\Sigma \cos^2 mx+q_1\,\Sigma \cos mx \operatorname{sen} mx+p_2\,\Sigma \cos mx \cos 2mx\\
\qquad +q_2\,\Sigma \cos mx \operatorname{sen} 2mx+\ldots\ldots=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} mx+p\,\Sigma \operatorname{sen} mx+p_1\,\Sigma \operatorname{sen} mx \cos mx+q_1\,\Sigma \operatorname{sen}^2 mx+p_2\,\Sigma \operatorname{sen} mx \cos 2mx\\
\qquad +q_2\,\Sigma \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} 2mx+\ldots\ldots=0\\
-\Sigma\, a_m \cos 2mx+p\,\Sigma \cos 2mx+p_1\,\Sigma \cos 2mx \cos mx+q_1\,\Sigma \cos 2mx \operatorname{sen} mx+p_2\,\Sigma \cos^2 2mx\\
\qquad +q_2\,\Sigma \cos 2mx \operatorname{sen} 2mx+\ldots\ldots=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} 2mx+p\,\Sigma \operatorname{sen} 2mx+p_1\,\Sigma \operatorname{sen} 2mx \cos mx+q_1\,\Sigma \operatorname{sen} 2mx \operatorname{sen} mx+p_2\,\Sigma \operatorname{sen} 2mx \cos 2mx\\
\qquad +q_2\,\Sigma \operatorname{sen}^2 2mx+\ldots\ldots=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(A)$$

Cuando nx (producto del número de observaciones por el número de grados de las partes en que están divididos los distintos círculos de referencia) es múltiplo de 2π, el sistema anterior se reduce al siguiente: [1]

$$\left.\begin{array}{r}
-\Sigma\, a_m+np=0\\
-\Sigma\, a_m \cos mx+p_1\,\Sigma \cos^2 mx=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} mx+q_1\,\Sigma \operatorname{sen}^2 mx=0\\
-\Sigma\, a_m \cos 2mx+p_2\,\Sigma \cos^2 2mx=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} 2mx+q_2\,\Sigma \operatorname{sen}^2 2mx=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(B)$$

Pero como luego probaremos

$$\left.\begin{array}{r}
\Sigma \cos^2 mx=\frac{n}{2}\\
\Sigma \operatorname{sen}^2 mx=\frac{n}{2}\\
\Sigma \cos^2 2mx=\frac{n}{2}\\
\Sigma \operatorname{sen}^2 2mx=\frac{n}{2}\\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(C)$$

luego, sustituyendo estos valores en el sistema (B) se obtiene finalmente

$$\left.\begin{array}{r}
-\Sigma\, a_m+np=0\\
-\Sigma\, a_m \cos mx+\frac{n}{2}p_1=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} mx+\frac{n}{2}q_1=0\\
-\Sigma\, a_m \cos 2mx+\frac{n}{2}p_2=0\\
-\Sigma\, a_m \operatorname{sen} 2mx+\frac{n}{2}q_2=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l}
p=\frac{\Sigma\, a_m}{n}\\
\frac{n}{2}p_1=\Sigma\, a_m \cos mx\\
\frac{n}{2}q_1=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} mx\\
\frac{n}{2}p_2=\Sigma\, a_m \cos 2mx\\
\frac{n}{2}q_2=\Sigma\, a_m \operatorname{sen} 2mx\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Estas son, en su forma general, las ecuaciones de Bessel que buscábamos; en nuestro caso particular de veinticuatro observaciones, $\frac{n}{2}=12$, lo que reduce estas ecuaciones a las que escribimos en la página 47. Queda probado también que la cantidad cons-

[1] Hemos juzgado conveniente dejar para el fin esta demonstración, para no interrumpir el raciocinio.

tante p o M, que completa la fórmula de Bessel es, como indicamos antes, la media aritmética de las observaciones; así en nuestro caso, tenemos:

$$p=\frac{a_0+a_1+a_2+\dots\dots\dots\dots+a_{23}}{24}$$

Fáltanos únicamente probar el paso del sistema (A) al sistema (B) y las igualdades (C).

Para lo primero, nos basta probar que, cuando nx es múltiplo de 2π, $\Sigma \operatorname{sen} mx=0$, $\Sigma \cos mx=0$, $\Sigma \operatorname{sen} 2mx=0$, $\Sigma \cos 2mx=0$, etc.

Tomemos la fórmula bien conocida en trigonometría:

$$2 \operatorname{sen} z \operatorname{sen} y=\cos (z-y)-\cos (z+y) \therefore \operatorname{sen} z=\frac{\cos (z-y)-\cos (z+y)}{2 \operatorname{sen} y} \quad (1)$$

Por una serie de aplicaciones de la fórmula (1) en la que escribiremos sucesivamente en vez de z, x, $2x$, $3x$, ..., $(n-1)x$, y en vez de y, $\frac{x}{2}$ obtenemos:

$$\operatorname{sen} x=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 3x=\frac{\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

....

$$\operatorname{sen} (n-2)x=\frac{\cos\frac{(2n-5)x}{2}-\cos\frac{(2n-3)x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen} (n-1)x=\frac{\cos\frac{(2n-3)x}{2}-\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

y sumando ordenadamente queda:

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x+\dots\dots\dots\dots+\operatorname{sen} (n-1)x=\Sigma \operatorname{sen} mx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos nx \cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen} nx \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

si nx es múltiplo de 2π, sabemos que

$$\cos nx=1; \operatorname{sen} nx=0$$

y queda finalmente:

$$\Sigma \operatorname{sen} mx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}}=0$$

Por análogo procedimiento se probaría que Σ sen $2mx=0$, Σ sen $3mx=0$, etc., así para este último, escribiríamos en la fórmula (1) $3x$, $6x$, $9x$, ..., $(n-1)3x$, en vez de z, y $\frac{3x}{2}$ en vez de y, lo que daría:

$$\Sigma \text{ sen } 3mx=\frac{\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{(6n-3)x}{2}}{2\text{ sen}\frac{3x}{2}}=\frac{\cos\frac{3x}{2}-\cos 3nx\cos\frac{3x}{2}-\text{sen } 3nx \text{ sen}\frac{3x}{2}}{2\text{ sen}\frac{3x}{2}}$$

y como $3nx$ es múltiplo de 2π, resulta: Σ sen $3mx=0$

Para probar que Σ cos $mx=0$, Σ cos $2mx=0$, etc., nos serviremos de la fórmula trigonométrica

$$2\cos z \text{ sen } y=\text{sen }(z+y)-\text{sen }(z-y) \therefore \cos z=\frac{\text{sen }(z+y)-\text{sen }(z-y)}{2\text{ sen } y} \quad (2)$$

y escribiendo en vez de z, 0, x, $2x$, ..., $(n-1)x$, y en vez de y, $\frac{x}{2}$, obtendremos por análogo procedimiento:

$$\cos 0=\frac{\text{sen}\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos x=\frac{\text{sen}\frac{3x}{2}-\text{sen}\frac{x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos 2x=\frac{\text{sen }\frac{5x}{2}-\text{sen }\frac{3x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos 3x=\frac{\text{sen}\frac{7x}{2}-\text{sen}\frac{5x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos (n-2)x=\frac{\text{sen}\frac{(2n-3)x}{2}-\text{sen }\frac{(2n-5)x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos (n-1)x=\frac{\text{sen}\frac{(2n-1)x}{2}-\text{sen}\frac{(2n-3)x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

Sumando ordenadamente obtenemos:

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\text{............}+\cos (n-1)x=\Sigma \cos mx=\frac{\text{sen}\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\text{sen}\frac{x}{2}+\text{sen } nx\cos\frac{x}{2}-\cos nx\text{ sen}\frac{x}{2}}{2\text{ sen}\frac{x}{2}}$$

y teniendo en cuenta que $nx=2\pi$, queda:

$$\Sigma \cos mx = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} = 0$$

Probado lo que precede, fácilmente se ve, que los demás términos del sistema (A) de la forma

$$\Sigma \cos mx \operatorname{sen} mx;\ \Sigma \operatorname{sen} mx \cos 2mx;\ \Sigma \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} 2mx;\ \Sigma \cos mx \operatorname{sen} 2mx;$$
$$\Sigma \cos mx \cos 2mx$$

se reducen también a cero; pues recordando que el producto del seno por el coseno de un mismo arco es igual a la mitad del seno del arco duplo, se obtiene:

$$\Sigma \cos mx \operatorname{sen} mx = \tfrac{1}{2}\Sigma \operatorname{sen} 2mx = 0$$

lo mismo podemos probar para las cuatro expresiones restantes valiéndonos de las bién conocidas fórmulas de trigonometría:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cos y &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x-y)\\
\cos x \operatorname{sen} y &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y) - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x-y)\\
\cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}\cos(x+y) + \tfrac{1}{2}\cos(x-y)\\
\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)
\end{aligned}$$

pues escribiendo en ellas en vez de x e y, mx y $2mx$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma \operatorname{sen} mx \cos 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \operatorname{sen} 3mx - \tfrac{1}{2}\Sigma \operatorname{sen} mx\\
\Sigma \cos mx \operatorname{sen} 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \operatorname{sen} 3mx + \tfrac{1}{2}\Sigma \operatorname{sen} mx\\
\Sigma \cos mx \cos 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos 3mx + \tfrac{1}{2}\Sigma \cos mx\\
\Sigma \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} 2mx &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos mx - \tfrac{1}{2}\Sigma \cos 3mx
\end{aligned}$$

y por lo probado anteriormente, los segundos miembros son *cero*.

Pasemos a probar las ecuaciones (C) ; un fácil desarrollo trigonométrico hace ver que:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

según esto tenemos:

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 0 &= 1 + \cos 0\\
2 \cos^2 x &= 1 + \cos 2x\\
2 \cos^2 2x &= 1 + \cos 4x\\
2 \cos^2 3x &= 1 + \cos 6x\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2 \cos^2 (n-1)x &= 1 + \cos 2(n-1)x
\end{aligned}$$

y sumando ordenadamente

$$2 \Sigma \cos^2 mx = n + 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots\ldots + \cos 2(n-1)x = n + \Sigma \cos 2mx.$$

pero según lo anteriormente demonstrado,

$$\Sigma \cos 2mx = 0$$

luego

$$\Sigma \cos^2 mx = \frac{n}{2}$$

Por análogo procedimiento probaríamos este mismo valor para un término cualquiera de la forma $\Sigma \cos^2 mkx$.

Para probar que $\Sigma \operatorname{sen}^2 mx = \frac{n}{2}$, nos valdremos de la conocida igualdad.

$$\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$$

y escribiremos

$$\text{sen}^2\, 0 = 1 - \cos^2 0$$
$$\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$$
$$\text{sen}^2\, 2x = 1 - \cos^2 2x$$
$$\text{sen}^2\, 3x = 1 - \cos^2 3x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{sen}^2\, (n-1)x = 1 - \cos^2 (n-1)x$$

sumando ordenadamente tendremos:

$$\Sigma\ \text{sen}^2\, mx = n - \Sigma \cos^2 mx$$

pero acabamos de probar que $\Sigma \cos^2 mx = \frac{n}{2}$, luego:

$$\Sigma\ \text{sen}^2\, mx = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

No juzgamos oportuno detenernos más en dar a conocer todo el método de Bessel; quien en ello estuviera interesado, podría consultar la explicación original del mismo Bessel, traducida al inglés por Mr. R. H. Scott en un apéndice al "Quarterly Weather Report of the Meteorological Office, London, 1870."

O